Ejemplo 3.14. El diagrama de Venn que cumple con las condiciones:

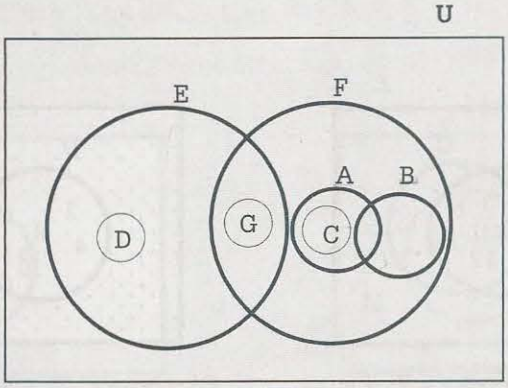
$C \subseteq (A - B)$ $\quad$ $D \subseteq (E - F)$

$(A \cup B) \subseteq (F - E)$ $\quad$ $G \subseteq (E \cap F)$

$A \cap B \neq \emptyset$ $\quad$ $E \cap F \neq \emptyset$

$(E \cup F) \subseteq \mathbf{U}$

es el siguiente:



3.6 Simplificación de expresiones usando leyes de conjuntos

A partir de las definiciones planteadas es posible establecer varias leyes de conjuntos que son útiles para simplificar u obtener expresiones equivalentes en donde intervienen operaciones propias de conjuntos. En la tabla 3.1 se presentan las leyes de conjuntos más importantes.

Tabla 3.1 Leyes de conjuntos

1.- Doble negación a) $A'' = A$	**6.- Ley de Morgan** a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$
2.- Ley conmutativa a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$	**7.- Equivalencia** a) $A \cup A' \cap B = A \cup B$
3.- Ley asociativa a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	**8.- Contradicción** a) $A \cap A' = \varnothing$
4.- Ley distributiva a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	**9.- Propiedades del complemento** a) $A \cup A' = \mathbf{U}$ b) $\mathbf{U}' = \varnothing$ c) $\varnothing' = \mathbf{U}$
5.- Ley de idempotencia a) $A \cup A = A$ b) $A \cap A = A$ c) $\mathbf{U} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ d) $\mathbf{U} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U}$ e) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ f) $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$	**10.- Ley de identidad** a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ b) $A \cap \mathbf{U} = A$ c) $A \cup \varnothing = A$ d) $A \cap \varnothing = \varnothing$ e) $A \cup A \cap B = A \cap (\mathbf{U} \cup B) = A$

Ejemplo 3.15. Usando las leyes de conjuntos, demostrar que

$A' \cap B' \cap C \cup A' \cap B \cap C \cup A \cap B' \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C' = A \cup B \cap C$

Solución

$A' \cap B' \cap \mathbf{C} \cup \mathbf{A'} \cap B \cap \mathbf{C} \cup \mathbf{A} \cap B' \cap \mathbf{C} \cup A \cap B \cap \mathbf{C} \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$

$(A' \cap C) \cap (\mathbf{B'} \cup \mathbf{B}) \cup (A \cap C) \cap (\mathbf{B'} \cup \mathbf{B}) \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$
Ley distributiva 4a.

$(A' \cap C) \cap \mathbf{U} \cup (A \cap C) \cap \mathbf{U} \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$

Propiedades del complemento 9a.

$A' \cap \mathbf{C} \cup A \cap \mathbf{C} \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$

Ley de identidad 10b.

$C \cap (\mathbf{A'} \cup \mathbf{A}) \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$

Ley distributiva 4a.

$C \cap \mathbf{U} \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$

Propiedades del complemento 9a.

$\mathbf{C} \cup A \cap B \cap C' = C \cup A \cap B$

Ley de identidad 10b.

$\mathbf{C} \cup \mathbf{C'} \cap \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = C \cup A \cap B$

Ley conmutativa 2b.

$C \cup A \cap B = C \cup A \cap B$

Equivalencia 7a.

Como se ve, en la demostración del ejemplo anterior se dejó fijo el lado derecho de la expresión y se simplificó el lado izquierdo hasta el punto en que se obtuvo la expresión de la derecha. Asimismo, debajo de cada planteamiento está la regla que se aplicó.

Por ejemplo: en las primeras tres líneas de la simplificación se aplica la "ley distributiva 4a" que consiste en factorizar algo que es común y dejar dentro del paréntesis lo no común, con la finalidad de que la información que quede dentro del paréntesis se pueda simplificar aplicando una nueva regla de conjuntos. Posteriormente se aplica la "propiedad del complemento 9a" que establece que $A \cup A' = \mathbf{U}$ y después la "ley de identidad 10b" $A \cap \mathbf{U} = A$. A continuación se muestra este procedimiento.

$$\underline{A'} \cap B' \cap \underline{C} \cup \underline{A'} \cap B \cap \underline{C} = (A' \cap C) \cap (B' \cup B)$$

Lo común es lo que está subrayado y aplicando la ley distributiva 4a que establece que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Se obtiene que:

$$(A' \cap C) \cap (B' \cup B) = (A' \cap C) \cap \mathbf{U}$$

Considerando que la propiedad del complemento 9a establece que $A \cup A' = \mathbf{U}$, entonces se puede decir que $B' \cup B = \mathbf{U}$ de forma que:

$$(A' \cap C) \cap \mathbf{U} = A' \cap C$$

Ya que la "ley de identidad 10b" establece que $A \cap \mathbf{U} = A$, de aquí se desprende que $(A' \cap C) \cap \mathbf{U} = A' \cap C$ y por tanto:

$$\underline{A} \cap B' \cap \underline{C} \cup \underline{A} \cap B \cap \underline{C} = (A \cap C) \cap (B' \cup B)$$

Lo común está subrayado y aplicando la ley distributiva 4a resulta que:

$$(A \cap C) \cap (B' \cup B) = (A \cap C) \cap \mathbf{U}$$

Aplicando la propiedad del complemento 9a se obtiene:

$$(A \cap C) \cap \mathbf{U} = A \cap C$$

Aplicando la ley de identidad 10b.

$$A \cap C = A \cap C$$

En las líneas cuatro, cinco y seis se aplican nuevamente la ley distributiva 4a, la propiedad del complemento 9a y la ley de identidad 10b respectivamente, como se muestra a continuación:

$$A' \cap \underline{C} \cup A \cap \underline{C} = C \cap (A' \cup A)$$

– Según ley distributiva 4a.

$$C \cap (A' \cup A) = C \cap \mathbf{U}$$

Después de aplicar la propiedad del complemento 9a.

$$C \cap U = C$$

Después de aplicar la ley de identidad 10b.

En las líneas séptima y octava se aplicaron la ley conmutativa 2b y finalmente la ley de equivalencia 7a, como se muestra a continuación:

$$C \cup A \cap B \cap \underline{C'} = C \cup C' \cap A \cap B$$

Después de aplicar la ley conmutativa 2b. (El conjunto que cambia de posición está subrayado.)

$$C \cup C' \cap A \cap B = C \cup A \cap B$$

Después de aplicar la ley de equivalencia que establece que $A \cup A' \cap B = A \cup B$. (Para poder aplicar la regla se considera que $A = C$; $A' = C'$ y $B = A \cap B$.)

El procedimiento generalizado es factorizar información común para aplicarle una nueva regla a la información no común que se encuentra dentro del paréntesis y de esa manera ir eliminando algunos conjuntos.

Ejemplo 3.16. Demostrar que

$$A' \cap B \cup (A \cap B \cap C)' \cup C \cap (B' \cup A) = \mathbf{U}$$

Solución

$A' \cap B \cup (\mathbf{A \cap B \cap C})' \cup C \cap (B' \cup A) = \mathbf{U}$
$A' \cap B \cup \mathbf{A' \cup B' \cup C'} \cup C \cap (B' \cup A) = \mathbf{U}$
Ley de Morgan 6b.

$\mathbf{A'} \cap B \cup \mathbf{A'} \cup \mathbf{B'} \cup C' \cup C \cap \mathbf{B'} \cup C \cap A = \mathbf{U}$
Ley distributiva 4a.

$A' \cap (B \cup \mathbf{U}) \cup B' \cap (\mathbf{U} \cup C) \cup C' \cup C \cap A = \mathbf{U}$
Ley distributiva 4a.

$A' \cap \mathbf{U} \cup B' \cap \mathbf{U} \cup C' \cup C \cap A = \mathbf{U}$
Ley de identidad 10a.

$A' \cup B' \cup \mathbf{C'} \cup \mathbf{C} \cap \mathbf{A} = \mathbf{U}$
Ley de identidad 10b.

$A' \cup B' \cup C' \cup A = \mathbf{U}$
Equivalencia 7a.

$\mathbf{A'} \cup \mathbf{A} \cup B' \cup C' = \mathbf{U}$
Ley conmutativa 2a.

$\mathbf{U} \cup \mathbf{B'} \cup C' = \mathbf{U}$
Propiedad del complemento 9a.

$\mathbf{U} \cup \mathbf{C'} = \mathbf{U}$
Ley de identidad 10a.

$\mathbf{U} = \mathbf{U}$
Ley de identidad 10a.

3.7 Relación entre teoría de conjuntos, lógica matemática y álgebra booleana

La lógica matemática y el álgebra booleana son herramientas fundamentales de la computación que se apoyan en las leyes de la teoría de conjuntos para explicar teoremas matemáticos o bien para simplificar expresiones booleanas. En la tabla 3.2 se presenta una comparación entre las leyes de la teoría de conjuntos, algunas equivalencias lógicas usadas en lógica matemática para la demostración de teoremas y algunas leyes del álgebra booleana que se utilizan en la simplificación de funciones booleanas.

Tabla 3.2 Equivalencias entre teoría de conjuntos, lógica matemática y álgebra booleana

Propiedad	Teoría de conjuntos	Lógica matemática	Álgebra booleana
Equivalencia	$A = B$	$p \Leftrightarrow q;\ p \equiv q$	$A = B$
Unión	$A \cup B$	$p \vee q$	$A + B$
Intersección	$A \cap B$	$p \wedge q$	AB
Complementación	A'	p'	A'
Doble negación	$A'' = A$	$p'' \equiv p$	$A'' = A$
Diferencia	$A - B$	$p \wedge q'$	AB'
Leyes de Morgan	$(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$	$(p \vee q \vee r)' \equiv p' \wedge q' \wedge r'$ $(p \wedge q \wedge r)' \equiv p \vee q \vee r'$	$(A + B + C)' = A'B'C'$ $(ABC)' = A' + B' + C'$
Ley conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	$A + B = B + A$ $AB = BA$
Ley asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$A + (B + C) = (A + B) + C$ $A(BC) = (AB)C$
Ley distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A(B + C) = AB + AC$ $A + (BC) = (A + B)(A + C)$
Ley de idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$ $\mathbf{U} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $\mathbf{U} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$ $1 \vee 1 \equiv 1$ $1 \wedge 1 \equiv 1$ $0 \vee 0 \equiv 0$ $0 \wedge 0 \equiv 0$	$A + A = A$ $AA = A$ $1 + 1 = 1$ $1(1) = 1$ $0 + 0 = 0$ $0(0) = 0$
Equivalencia	$A \cup A' \cap B = A \cup B$	$p \vee p' \wedge q \equiv p \vee q$	$A + A'B = A + B$
Contradicción	$A \cap A' = \varnothing$	$p \wedge p' \equiv 0$	$AA' = 0$
Propiedades del complemento	$A \cup A' = \mathbf{U}$ $\mathbf{U}' = \varnothing$ $\varnothing' = U$	$p \vee p' \equiv 1$ $1' \equiv 0$ $0' \equiv 1$	$A + A' = 1$ $1' = 0$ $0' = 1$
Ley de identidad	$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup A \cap B = A \cap (\mathbf{U} \cup B) = A$	$p \vee 1 \equiv 1$ $p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$ $p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee p \wedge q \equiv p \wedge (1 \vee q) \equiv p$	$A + 1 = 1$ $A(1) = A$ $A + 0 = A$ $A(0) = 0$ $A + AB = A(1 + B) = A$

$B = \{x \mid x \in \mathbf{Z};\ x \text{ es impar};\ 0 < x < 20;\ x \text{ es divisible entre } 3\}$
$C = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$
$D = \{\ x \mid x \in \mathbf{Z};\ x \text{ es primo};\ 1 \leq x < 30\}$

Calcular:

a) $[(A \oplus B) - (C \cup D)]'$
b) $[(B' \cap C) - A'] \oplus (D \oplus B')$
c) $(([D' - B] \cap A) - C') \oplus A'$
d) $[(A' - B') \oplus (C \cap D')] - C'$
e) $[(C \cup D') - (A' \oplus B')] \cap B$

3.15. Usando leyes de conjuntos demostrar que las igualdades de cada uno de los incisos siguientes son verdaderas.

a) $A' \cap B' \cap C' \cup A \cap B' \cap C' \cup A' \cap B \cap C \cup A' \cap B \cap C' \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C' = B \cup C'$
b) $A' \cap B' \cap C \cup A \cap B' \cap C' \cup A \cap B' \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C' = A \cup B' \cap C$
c) $(((A \cup B')' \cup C)' \cap (C \cup B)')' = B \cup C$

3.16. Usando leyes de conjuntos demostrar que las igualdades de cada uno de los incisos siguientes son verdaderas.

a) $A' \cap B' \cap C \cup A' \cap B \cap C \cup A' \cap B \cap C' \cup A \cap B' \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C' = B \cup C$
b) $(((A' \cup B)' \cup (C \cup A)')' \cup (B' \cup C)')' = A \cap B' \cup B' \cap C'$
c) $A' \cap B' \cap C' \cup A' \cap B' \cap C \cup A' \cap B \cap C \cup A' \cap B \cap C' \cup A \cap B' \cap C \cup A \cap B \cap C = A' \cup C$
d) $A' \cap B \cap C' \cap D' \cup A' \cap B \cap C \cap D \cup A' \cap B \cap C \cap D' \cup A \cap B \cap C' \cap D' \cup A \cap B \cap C \cap D \cup A \cap B \cap C \cap D' \cup A \cap B' \cap C' \cap D' \cup A \cap B' \cap C \cap D = B \cap C \cup A \cap C \cap D \cup B \cap D' \cup A \cap C' \cap D'$

3.17. Resolver los problemas de los siguientes incisos usando conjuntos finitos:

I. La compañía "Desarrollo de sistemas S.A." necesita contratar 18 personas que programen en Access y 12 personas que programen en Java. De estos programadores se considera que 10 personas saben programar tanto en Access como en Java. ¿Cuántos programadores deberá contratar la compañía?