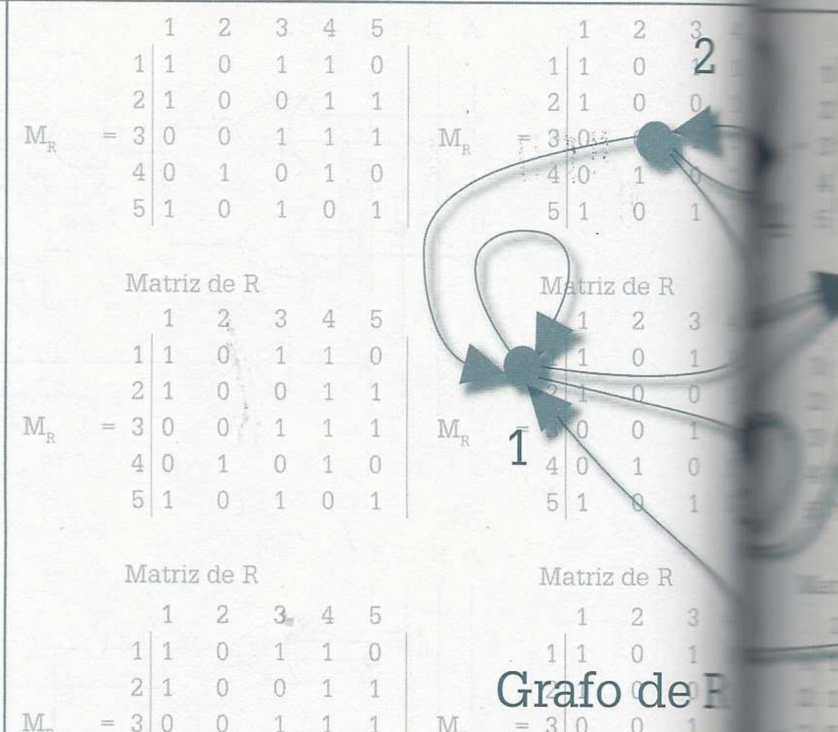
CAPÍTULO

VI

Relaciones



Las matemáticas no se ocupan más que de la enumeración y comparación de relaciones.

Carl Friedrich Gauss

Objetivos

- Comprender el concepto de relación y su diferencia con una función.
- Aprender a representar las funciones y relaciones de diferente manera.
- Aprender a realizar operaciones con relaciones.
- Saber cuáles son las características de las relaciones de equivalencia y la manera en que una relación puede adquirirlas.
- Aplicar los conceptos de relación y función en la computación.

6.1 Introducción

Una relación es una correspondencia entre dos elementos de dos conjuntos con ciertas propiedades. En computación las relaciones se utilizan en bases de datos, estructuras de datos, redes, autómatas y lenguajes. Por ejemplo, se pueden guardar datos personales de un trabajador: número de control, registro federal de causantes, puesto ocupado, antigüedad y salario, entre otros. Para relacionar los datos de este archivo con otra información, se establece el campo relación y las reglas que permitirán la búsqueda y asignación de información. Una vez que se establece la relación, es posible llevar a cabo varias operaciones entre relaciones utilizando para ello el álgebra relacional. Las estructuras de datos son relaciones que permiten acceder de manera más rápida y ordenada la información; por lo general la relación la establece el orden en que se deseen recorrer los datos (orden alfabético, antigüedad, salario, etc.) usando como elemento físico de relación entre los nodos los apuntadores. Un autómata es un conjunto de estados, y algunos de ellos se consideran de aceptación y otros no pero la finalidad es el reconocimiento de palabras de un lenguaje; debido a que estos estados se encuentran vinculados, se puede considerar a los autómatas como una relación. Uno de los usos más comunes de los autómatas se encuentra en el área de los compiladores, que está estrechamente relacionada con los lenguajes formales. Una red de computadoras también se considera una relación: aquí los nodos (computadoras en este caso) están relacionados o comunicados entre sí por medio de señales (alámbricas o inalámbricas). Las redes eléctricas, telefónicas, de agua potable y alcantarillado, también se pueden considerar como relaciones, solamente que en este caso los nodos pueden ser válvulas, bombas, coladeras, lámparas, postes, centrales telefónicas, entre otros, y la relación se establece por medio de tubos, cables y satélites. Pero la forma de tratar las relaciones, independientemente del área del conocimiento, es muy semejante por lo que la información tratada en este capítulo es de gran utilidad.

Las funciones son una clase especial de relación y se utilizan prácticamente en todas las áreas de las matemáticas, en particular en cálculo diferencial e integral, geometría analítica, trigonometría y álgebra. En computación las funciones tienen aplicación directa en lenguajes de programación, ya que cada uno de éstos tiene sus propias librerías de funciones estándar permitiendo al usuario adicionar más funciones con el objeto de hacerlos más ricos, fáciles y poderosos en el momento de programar.

6.2 Elementos de una relación

La definición de relación es la siguiente: dados dos conjuntos no vacíos A y B, una relación R es un conjunto de pares ordenados en donde el primer elemento a está relacionado con el segundo elemento b por medio de cierta propiedad o característica. La relación se indica como aRb:

$$R = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Una relación es una tabla que muestra la correspondencia de unos elementos con respecto a otros; por ejemplo la relación entre maestros y las materias que imparte cada uno, cumple con las características de relación por lo que se puede representar de la siguiente manera:

Maestro	Materia
Jorge	Sistemas digitales
Domingo	Lenguajes algorítmicos
Ignacio	Estructuras de datos
Jorge	Graficación
Raymundo	Programación II
Manuel	Sistemas operativos
Ezequiel	Sistemas digitales

En este caso se tiene que:

A = {x | x es un maestro}

B = {y | y es una materia de la carrera de ingeniería en sistemas computacionales}

R = {(Jorge, Sistemas digitales), (Jorge, Graficación), (Domingo, Lenguajes algorítmicos), (Ignacio, Estructuras de datos), (Raymundo, Programación II), (Manuel, Sistemas operativos), (Ezequiel, Sistemas digitales)}

Se entiende que el conjunto A está integrado por todos los maestros, aunque no aparezcan en la relación, y que el conjunto B también tiene más materias que las que se consideran en la tabla anterior.

En términos de relación se dice que Jorge está relacionado con Sistemas digitales y Graficación, y que Ignacio está relacionado con Estructuras de datos. Se nota claramente cuáles son los elementos de cada uno de los conjuntos que conforman la relación, pero cada uno de los conjuntos puede tener más información que puede llevar consigo en el momento en que se establece la relación. Por ejemplo, los elementos fundamentales del primer conjunto son los nombres de los maestros, pero a ese conjunto podrían pertenecer campos como código, edad, salario, especialidad, que también son datos propios de cada uno de los maestros, así como en el caso de las materias es típico el número de créditos, código, requisitos, etcétera. Incluso es común en el caso de bases de datos que el campo con el que se establece la relación sea el código de la materia y el código del maestro, y no el nombre de cada uno de ellos.

Las relaciones se forman si se cumple cierta proposición, esa proposición puede ser textual, como en el caso anterior ("Imparten la materia"), pero también puede ser planteada en lenguaje matemático.

Ejemplo 6.1. Sean los conjuntos

$$A = \{a \mid a \in Z;\ 10 < a < 30\}$$
$$B = \{b \mid b \in Z^+;\ b \leq 20\}$$

y sea R una relación de A en B, en donde el elemento $a \in A$ es divisible entre 13 y $b \in B$ es primo.

Como resultando se obtiene la siguiente relación:

$$R = \{(13, 2), (13, 3), (13, 5), (13, 7), (13, 11), (13, 13), (13, 17), (13, 19), (26, 2), (26, 3), (26, 5), (26, 7), (26, 11), (26, 13), (26, 17), (26, 19)\}$$

Hay que observar que las relaciones también se pueden representar como un conjunto de pares ordenados, en donde el elemento $a \in A$ está relacionado con el segundo elemento $b \in B$, por medio de cierta condición establecida. En este caso la condición es que el primer elemento de los pares ordenados sea un entero entre 10 y 30, divisible entre 13, y el segundo elemento es un entero positivo primo, menor o igual a 20. Otra forma de representar de este conjunto es

$$R = \{(a, b) \mid a \in Z,\ b \in Z^+;\ a \text{ es divisible entre } 13;\ 10 < a < 30;\ b \text{ es primo};\ b \leq 20\}$$

Si los elementos de un conjunto se pueden relacionar, se dice que los conjuntos que integran la relación están ordenados y a la relación se le llama "relación de orden" en el conjunto. Sin embargo, existen muchos conjuntos cuyos elementos no son comparables. Por ejemplo, en el conjunto de los boxeadores profesionales no es posible tener una pelea entre Julio César Chávez y Mike Tyson (suponiendo que estuvieran activos) debido a que no son del mismo peso, por lo tanto el conjunto de peleas posibles entre boxeadores profesionales es un conjunto parcialmente ordenado, para todos sus pesos, pero no entre las mismas categorías.

6.2.1 Producto cartesiano

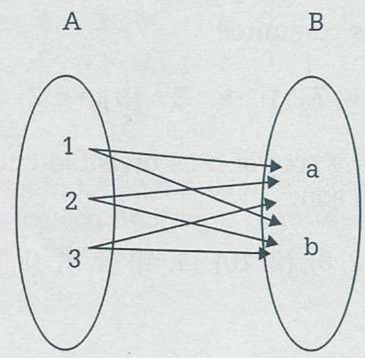
El producto cartesiano de los conjuntos A y B, que se denota como A × B, es la combinación de todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B. En teoría de conjuntos equivale al conjunto universo.

Una relación R de A en B (R: $A \to B$) es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $R \subseteq A \times B$ y $(a, b) \in R$, entonces a su vez el producto cartesiano también es una relación.

Ejemplo 6.2. Sean los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{y} \quad B = \{a, b\}$$

El producto cartesiano $A \times B$ contiene todos los pares ordenados que resultan de relacionar todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B, como se muestra en la siguiente figura:



$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

La figura del ejemplo 6.2 muestra otra forma de representar una relación: un "diagrama de flechas" en el que se muestran claramente los elementos que pertenecen a cada conjunto, así como la relación entre ellos. También es fácil ver que $A \times B \neq B \times A$.

6.2.2 Relación binaria

No siempre los elementos de la relación son pares ordenados, ya que pueden tener más de dos elementos como en el siguiente caso:

$$R = \{(a, 1, \Delta), (a, 2, \square), (b, 1, \Delta), (c, 3, \square), (c, 2, \Delta)\}$$

Aquí la relación está formada por tercias de elementos pertenecientes a los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{\square, \Delta\}$. En este caso se trata de una relación terciaria y no binaria, ya que los elementos no son pares ordenados sino tercias.

Una de las relaciones más importantes en la computación es la relación binaria, ya que se puede representar por medio de una matriz, tabla o gráfica. Además de ser más fácil de manejar, se le llama relación binaria porque sus elementos son pares ordenados que se forman a partir de dos conjuntos.

En toda relación de pares ordenados no vacía se tienen dos conjuntos: el dominio de R (Dom(R)), que es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares de una relación el cual es un subconjunto del conjunto A (Dom(R) $\subseteq$ A), y el codominio de R (Cod(R)), conjunto que está formado por los segundos elementos de los pares de la relación R y que también es un subconjunto de B (Cod(R) $\subseteq$ B).

Ejemplo 6.3. Sean los conjuntos

$$A = \{2, 4, 5, 6, 7, 11\} \quad y \quad B = \{b \mid b \in Z;\ 1 \leq b \leq 10\}$$

Considérese que aRb si y sólo si b es divisible entre a. Por lo tanto, los elementos de la relación son:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 4), (4, 8), (5, 5), (5, 10), (6, 6), (7, 7)\}$$

$$\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\mathrm{Cod}(R) = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

6.2.3 Matriz de una relación

Si A y B son dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente, y R es una relación de A en B, entonces es posible representar a R como una matriz $M_R = [m_{ij}]$ cuyos elementos se definen como:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (a, b) \in R \\ 0 \text{ si } (a, b) \notin R \end{cases}$$

Ejemplo 6.4. Sean los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

y sea la relación R: $A \to B$ tal que

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 7), (4, 2), (4, 5), (5, 6)\}$$

Esta relación se puede representar en forma de matriz como sigue:

$$M_R = \begin{array}{c|ccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Los elementos del conjunto A se representan como filas y los del conjunto B como columnas. Se coloca un 1 si el par ordenado se encuentra en la relación y un 0 en caso contrario.

La representación matricial es muy importante ya que se presta para llevar a cabo las operaciones entre relaciones, sobre todo cuando se tienen relaciones muy grandes.

6.2.4 Grafo de una relación

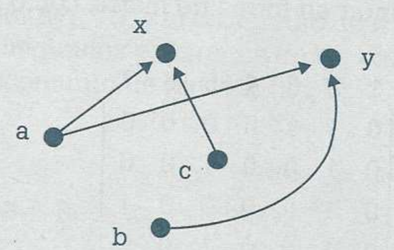
Es posible representar una relación por medio de una gráfica integrada por nodos y flechas, y a este tipo de gráfica se le conoce como "grafo dirigido" de R. Para hacer un grafo sólo se tienen que colocar los elementos de los conjuntos A y B como nodos, y la relación que existe entre los elementos se indica por medio de una flecha que va del elemento del conjunto A al elemento del conjunto B con el que está relacionado.

Ejemplo 6.5. Sean los conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \quad y \quad B = \{x, y\}$$

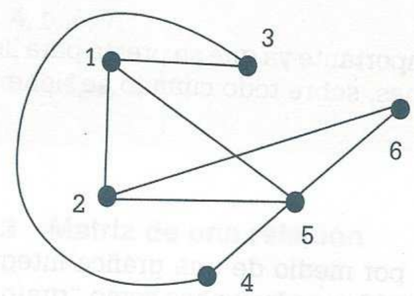
y sea la relación R: A $\rightarrow$ B tal que

$$R = \{(a, x), (a, y), (b, y), (c, x)\}$$

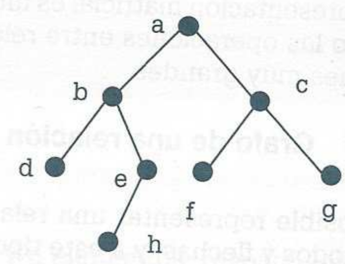


Grafo dirigido

Los grafos pueden ser de dos tipos: "dirigidos", como el del ejemplo 6.5 en el que los nodos están relacionados por medio de una flecha que indica la relación, o "no dirigidos", como el siguiente grafo en el que no existe direccionamiento:



Red



Árbol

Los grafos no dirigidos tienen mucha aplicación tanto en el área de la computación como en los sistemas de comunicación, ya que por medio de un grafo no dirigido es posible representar una red carretera, una red telefónica, una red de computadoras, una red de redes y un árbol, entre otros. En un grafo no dirigido la relación es en ambos sentidos (se considera que las líneas tienen cabezas de flecha en ambos extremos), por lo que no es necesaria la flecha. Este tipo de grafo se expone en el siguiente capítulo.

Es muy común que los conjuntos A y B tengan los mismos elementos. Por ejemplo en el caso $A = B = \{x \mid x \text{ es un animal}\}$ se entiende que tanto A como

B tienen como elementos a todos los animales, con los cuales se pueden establecer diversas relaciones. En este caso se dice que $R \subseteq A \times A$ es una relación de A, en lugar de una relación de A en A.

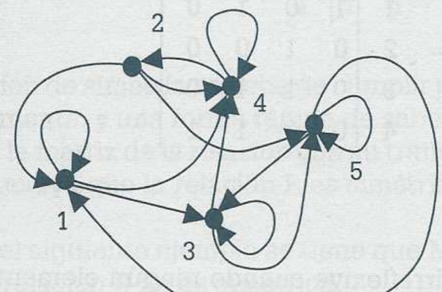
Ejemplo 6.6. Sean los conjuntos

$$A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

y la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

cuyo grafo y representación matricial son los siguientes:



Grafo de R

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Matriz de R

Se puede observar que cuando A = B, es posible establecer una relación de un elemento a él mismo como ocurre con los pares (1, 1), (2, 2), (4, 4) y (5, 5), y que la matriz de la relación siempre será cuadrada.

6.3 Tipos de relaciones

Las relaciones y funciones deben cumplir con ciertos requisitos para que sean consideradas como tales, y como cada una de ellas tiene sus características propias es posible establecer cierta clasificación. En la siguiente clasificación de relaciones se considera que los conjuntos A y B son iguales, lo que implica que su representación matricial siempre es cuadrada.

6.3.1 Relación reflexiva

Una relación es reflexiva cuando todo elemento de un conjunto A está relacionado consigo mismo, esto es, cuando se cumple que aRa para todo elemento de A. Una característica de este tipo de relación es que su matriz correspondiente contiene unos en toda su diagonal principal y los elementos restantes de la matriz pueden ser unos o ceros, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Sean A = B = {1, 2, 3, 4} y

$$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)\}$$

Entonces la matriz de esta relación es

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

6.3.2 Relación irreflexiva

Se dice que una relación es irreflexiva cuando ningún elemento del conjunto A está relacionado consigo mismo ($(a, a) \notin R$). En este caso la matriz de la relación deberá contener únicamente ceros en la diagonal. Si la diagonal de la matriz tiene ceros y unos, la relación correspondiente no es reflexiva ni irreflexiva.

En el siguiente ejemplo se tiene la matriz de una relación que sólo contiene ceros en su diagonal, por lo tanto ésta es una relación irreflexiva ya que ningún elemento está relacionado consigo mismo.

Sean A = B = {1, 2, 3, 4} y

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 2), (4, 3)\}$$

Entonces la matriz de la relación es

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

6.3.3 Relación simétrica

Se dice que una relación R: $A \to B$ es simétrica cuando $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$. Si (a, b) está en la relación pero (b, a) no, entonces la relación no es simétrica.

En el siguiente ejemplo la matriz de esta relación tiene unos o ceros en los pares colocados simétricamente, esto es, si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$. Pero si $(a, b) \notin R$ entonces $(b, a) \notin R$.

$$
M_R = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right|
\end{array}
$$

La condición de simetría se debe de cumplir para todos los pares colocados simétricamente, y una forma rápida de saber si la relación es simétrica es comparar la matriz de la relación con su transpuesta: si son iguales entonces se concluye que la relación R es simétrica.

Como en el siguiente ejemplo se tiene que $M_R \neq M_R^{-1}$ entonces se concluye que la relación R no es simétrica:

$$
M_R^{-1} = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right|
\end{array}
$$

Aquí hay que recordar que M_R^T resulta de convertir las columnas de M_R en filas.

6.3.4 Relación asimétrica

Una relación R de A en B es asimétrica si cuando $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \notin R$, además de que ningún elemento deberá estar relacionado consigo mismo; esto significa que la diagonal de la matriz de la relación deberá contener solamente ceros.

En relación con los pares simétricos de la siguiente matriz hay que observar que si uno de ellos vale 1, su simétrico debe valer 0. Por otro lado, la diagonal debe tener solamente ceros, lo cual indica que ningún elemento está relacionado consigo mismo.

$$
M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}
$$

Los pares colocados simétricamente pueden ser pares de ceros, pero nunca pares de unos.

6.3.5 Relación antisimétrica

Una relación es antisimétrica cuando uno de los pares colocados simétricamente no está en la relación, lo cual significa que (a, b) ∉ R o bien (b, a) ∉ R. En este caso la diagonal de la matriz no es importante, ya que pueden estar o no relacionados los elementos con ellos mismos.

En la matriz de la relación siguiente, cuando menos uno de los pares simétricos de la relación es 0, lo cual significa que (a, b) ∉ R o bien (b, a) ∉ R. En la diagonal puede haber ceros o unos, y también puede haber pares de ceros colocados simétricamente y por lo tanto es una relación antisimétrica.

$$
M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}
$$

6.3.6 Relación transitiva

Una relación de A en B tiene la propiedad de ser transitiva si cuando aRb y bRc entonces existe el par aRc.

En la matriz de la siguiente relación se tiene (2, 3) y (3, 4), entonces existe (2, 4). También se tiene (3, 1) y (1, 3), entonces (3, 3). De esta forma se deben de revisar todos los posibles pares para ver si se cumple la transitividad.

$$
M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}
$$

Luego de llevar a cabo la tabulación correspondiente se concluye que la relación anterior no es transitiva, ya que debe tener los pares ordenados encontrados a continuación:

$(1, 3), (3, 1) \Rightarrow (1, 1)^*$
$(2, 2), (2, 4) \Rightarrow (2, 4)$
$(3, 1), (1, 3) \Rightarrow (3, 3)$
$(4, 3), (3, 1) \Rightarrow (4, 1)^*$
$(1, 3), (3, 3) \Rightarrow (1, 3)$
$(2, 3), (3, 1) \Rightarrow (2, 1)^*$
$(3, 3), (3, 1) \Rightarrow (3, 1)$
$(4, 3), (3, 3) \Rightarrow (4, 3)$
$(1, 3), (3, 4) \Rightarrow (1, 4)^*$
$(2, 3), (3, 3) \Rightarrow (2, 3)$
$(3, 3), (3, 3) \Rightarrow (3, 3)$
$(4, 3), (3, 4) \Rightarrow (4, 4)^*$
$(2, 2), (2, 2) \Rightarrow (2, 2)$
$(2, 3), (3, 4) \Rightarrow (2, 4)$
$(3, 3), (3, 4) \Rightarrow (3, 4)$
$(2, 2), (2, 3) \Rightarrow (2, 3)$
$(2, 4), (4, 3) \Rightarrow (2, 3)$
$(3, 4), (4, 3) \Rightarrow (3, 3)$

Sin embargo, le faltan los 5 elementos marcados con asterisco (*), para que cumpla con la propiedad de transitividad, pero aunque sólo le faltara uno esto sería suficiente para que no fuera transitiva. También es común que se obtengan elementos repetidos, por ejemplo (2, 4) aparece dos veces, pero en este caso solamente se considera uno de ellos y los demás se descartan.

Por lo general las relaciones que se usan en la práctica son muy grandes, por lo que las dimensiones de la matriz también lo son y elaborar un algoritmo para saber si una relación es transitiva por medio de la tabulación requiere mucho tiempo, y el número de iteraciones que debe llevar a cabo la computadora es considerable. Se recomienda que en lugar de esto se desarrolle un algoritmo para multiplicar la matriz booleana M_R por ella misma, para obtener M_R^2. Si $M_R = M_R + M_R^2$ se dice que la relación R es transitiva.

$$M_R^2 = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \odot \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Los elementos de la matriz resultante se obtuvieron multiplicando las filas de la primera matriz, por cada una de las columnas de la segunda.

Como se muestra a continuación, para obtener la primera fila de la matriz resultante se multiplica la primera fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda:

$$0(0) + 0(0) + 1(1) + 0(0) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$$
$$0(0) + 0(1) + 1(0) + 0(0) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$
$$0(1) + 0(1) + 1(1) + 0(1) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$$
$$0(0) + 0(1) + 1(1) + 0(0) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$$

Para obtener la segunda fila de la matriz resultante, se multiplica la segunda fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda matriz:

$$0(0) + 1(0) + 1(1) + 1(0) = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$$
$$0(0) + 1(1) + 1(0) + 1(0) = 0 + 1 + 0 + 0 = 1$$
$$0(1) + 1(1) + 1(1) + 1(1) = 0 + 1 + 1 + 0 = 1$$
$$0(0) + 1(1) + 1(1) + 1(0) = 0 + 1 + 1 + 0 = 1$$

Y así sucesivamente hasta multiplicar todas las filas de la primera matriz, por cada una de las columnas de la segunda.

Note cómo los pares ordenados obtenidos por medio de la multiplicación booleana son los mismos que se obtuvieron por medio de tabulación. En este caso se dice que R no es transitiva, ya que $M_R \neq M_R + M_R^2$. El procedimiento para multiplicar dos matrices booleanas es semejante a la multiplicación escalar de matrices. Hay que recordar que para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda. En este caso no hay ningún problema ya que las matrices de las relaciones son de las mismas dimensiones, de forma que dicha condición se cumple. Se observó también que si la suma de los productos parciales es mayor que 1, se reduce a 1 ya que en álgebra booleana solamente existen ceros y unos. El símbolo $\odot$ significa que se trata de multiplicación de matrices boolenas.

Considerando que A = B, en la tabla 6.1 se resumen las propiedades de las diferentes relaciones.

Tabla 6.1 Propiedades de las relaciones.

Propiedad	Condición
Reflexiva	aRa, $\forall$ a $\in$ A
Irreflexiva	(a, a) $\notin$ R, $\forall$ a $\in$ A
Simétrica	Cuando (a, b) $\in$ R entonces (b, a) $\in$ R, o bien cuando (a, b) $\notin$ R entonces (b, a) $\notin$ R.
Asimétrica	Cuando (a, b) $\in$ R entonces (b, a) $\notin$ R. Además si a = b (a, a) $\notin$ R.
Antisimétrica	(a, b) $\notin$ R o bien (b, a) $\notin$ R. La diagonal no es importante en este caso.
Transitiva	Si (a, b) $\in$ R y (b, c) $\in$ R; entonces (a, c) $\in$ R.

Ejemplo 6.7. Sean los conjuntos A = B = {1, 2, 3, 4} y la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Determinar si la relación es reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

Solución. Las respuestas se pueden dar a partir de la matriz de la relación, ya que esto permite mayor claridad.

$$M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

1) **La relación no es reflexiva** ya que debería tener solamente unos en la diagonal principal, esto es, todos los elementos del conjunto A deberían estar relacionados consigo mismos. Por ejemplo (2, 2) $\notin$ R. Cuando no se cumple con la propiedad, para demostrar esto es suficiente con exhibir un caso.
2) **La relación no es irreflexiva** ya que ningún elemento debería estar relacionado consigo mismo, lo cual significa que la diagonal principal deberá tener solamente ceros. A diferencia de esto se tiene que, por ejemplo (1, 1) $\in$ R.

3) **La relación sí es simétrica** ya que los pares de elementos colocados simétricamente alrededor de la diagonal principal son o bien ceros o unos [el simétrico de (2, 3) es (3, 2) y ambos deben ser ceros o bien unos, pero esto deberá cumplirse para todos los pares colocados simétricamente]. Una forma de saber si una relación es simétrica es por medio de su inversa (R^{-1}). Si $R = R^{-1}$ se dice que la relación es simétrica:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$
$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (4, 2), (4, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$$

Es más fácil manejar la información por medio de una matriz. En este caso la matriz de la relación deberá ser igual a su inversa ($M_R = M_R^{-1}$).

$$M_R^{-1} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Como se observa que $M_R = M_R^{-1}$, se puede concluir que R es una relación simétrica.

4) **La relación no es asimétrica** ya que los pares de elementos colocados simétricamente alrededor de la diagonal deberían ser contrarios, esto es, si uno es cero su contrario debe ser uno. Además la diagonal principal deberá contener solamente ceros. En este caso se tiene por ejemplo que $(1, 2) \in R$ y $(2, 1) \in R$, pero si uno de ellos está contenido en la relación entonces su simétrico no debería estar en ella, sin embargo lo está y esto es suficiente para concluir que la relación R no es asimétrica. Además ningún elemento debería estar relacionado con él mismo, sin embargo no sucede eso ya que por ejemplo $(1, 1) \in R$.

5) **La relación no es antisimétrica** ya que al menos uno de los pares ordenados colocados simétricamente debería ser cero y en la matriz se tiene que $(1, 2) \in R$ y también que $(2, 1) \in R$, lo mismo ocurre con los pares (2, 4) y (4, 2) así como con (3, 4) y (4, 3). Conviene aclarar que no es necesario citar todos los casos para afirmar que la relación dada no es antisimétrica, ya que con un par de pares ordenados en donde no se cumpla la condición es suficiente para concluir que la relación no tiene cierta propiedad. Sin embargo, si se afirma que una relación tiene una propiedad entonces es necesario que se cumpla para todos los pares y no solamente para algunos.

6) La relación no es transitiva porque al menos existe un caso en donde no se cumple que si (a, b) $\in$ R y (b, c) $\in$ R, entonces (a, c) $\in$ R. Un ejemplo de esto son los pares ordenados (2, 4) y (4, 2), ya que el par (2, 2) no pertenece a la relación. Esto mismo se pudo haber concluido si se observa que $M_R \neq M_R + (M_R)^2$:

$$M_R^2 = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$M_R + M_R^2 = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} + \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccc|} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Como $M_R \neq M_R + M_R^2$ entonces la relación R no es transitiva.

6.4 Relaciones de equivalencia, clases de equivalencia y particiones

Una relación de equivalencia es aquella que tiene las tres propiedades: *reflexiva*, *simétrica y transitiva.* Por otro lado, una relación de equivalencia tiene clases de equivalencia y éstas forman particiones. Una partición es un subgrafo completo.

Las clases de equivalencia son conjuntos que contienen a todos los elementos b $\in$ B y que están relacionados con a $\in$ A. Los elementos del primer conjunto se encierran entre corchetes, de forma que una clase de equivalencia se puede indicar como

$$[a] = \{b \mid b \in B, aRb\}$$

Una partición es un conjunto de clases de equivalencia (conjunto de conjuntos) con las siguientes propiedades:

a) Deberán estar contenidos todos los elementos del conjunto A.

b) La intersección entre las clases de equivalencia deberá ser vacía.

Más formalmente se puede indicar como:

λ = {[a] | a $\in$ A, la intersección entre clases de equivalencia es vacía}

Ejemplo 6.8. Establecer si la siguiente relación es de equivalencia y plantear el argumento correspondiente.

Sean A = B = {1, 2, 3, 4, 5} y

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 5)}

1) Por inspección de R se ve que se cumple que aRa $\forall$ a $\in$ A, esto es, todo elemento del conjunto A está relacionado con él mismo. Otra forma de ver esto es observar que la diagonal principal de la matriz de la relación sólo contiene unos:

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2) Es una relación simétrica porque para todos los pares simétricos de la relación se cumple que si (a, b) $\in$ R entonces (b, a) $\in$ R. Esto significa que $R = R^{-1}$:

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 5)}

R^{-1} = {(1, 1), (2, 1), (5, 1), (1, 2), (2, 2), (5, 2), (3, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 4), (1, 5), (2, 5), (5, 5)}

O bien por medio de matrices se cumple que $M_R = M_R^{-1}$:

$$M_R = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad M_R^{-1} = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3) También es una relación transitiva, ya que si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$, en todos los casos. Esto se puede observar fácilmente ya que $M_R = M_R + M_R^2$.

$$M_R^2 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_R + M_R^2 = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} + \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|ccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Como se trata de una relación de equivalencia, entonces sus clases de equivalencia son las siguientes:

$[1] = \{1, 2, 5\}$ Todos los elementos que están relacionados con 1.

$[2] = \{1, 2, 5\}$ Todos los elementos que están relacionados con 2.

$[3] = \{3, 4\}$

$[4] = \{3, 4\}$

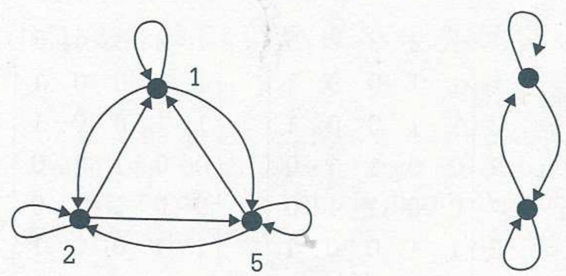
$[5] = \{1, 2, 5\}$

Hay que observar que en ningún caso la clase de equivalencia es vacía, ya que la propiedad reflexiva hace que cuando menos contenga un elemento ($a \in [a]$).

La partición es un conjunto de conjuntos en donde están contenidos todos los elementos de A, pero en donde la intersección de esos conjuntos es vacía. En este caso se tienen dos particiones:

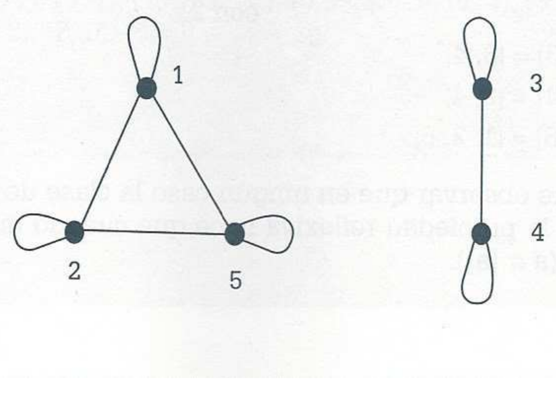
$\lambda = \{[1], [3]\} = \{[1], [4]\} = \{[2], [3]\} = \{[2], [4]\} = \{[5], [3]\} = \{[5], [4]\}$
$\lambda = \{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}\}$

Una característica importante de las particiones es que el grafo de la relación R está partido en subgrafos completos (de ahí el nombre de partición). En este caso está partido en dos:



Las relaciones de equivalencia son importantes porque es una propiedad que deben tener las redes en el área de computación, en donde la computadora 1 de una red puede enviar información a la computadora 2, pero además la computadora 2 puede enviar información o comunicarse con la computadora 1; ésta es la propiedad de simetría. Por otro lado, toda computadora tiene comunicación consigo misma, con lo cual se cumple la propiedad reflexiva. Así como si existe un camino de comunicación para ir de 1 a 2, (1, 2), y uno para ir de (2, 5), debe haber uno de (1, 5) con lo cual se cumple la propiedad de transitividad.

Debido a que en las redes se tienen grafos completos, ya no se pone la flecha o dirección de relación sino que se sustituyen por una arista sin cabeza de flecha. De esta forma la partición anterior se representa de la siguiente manera:

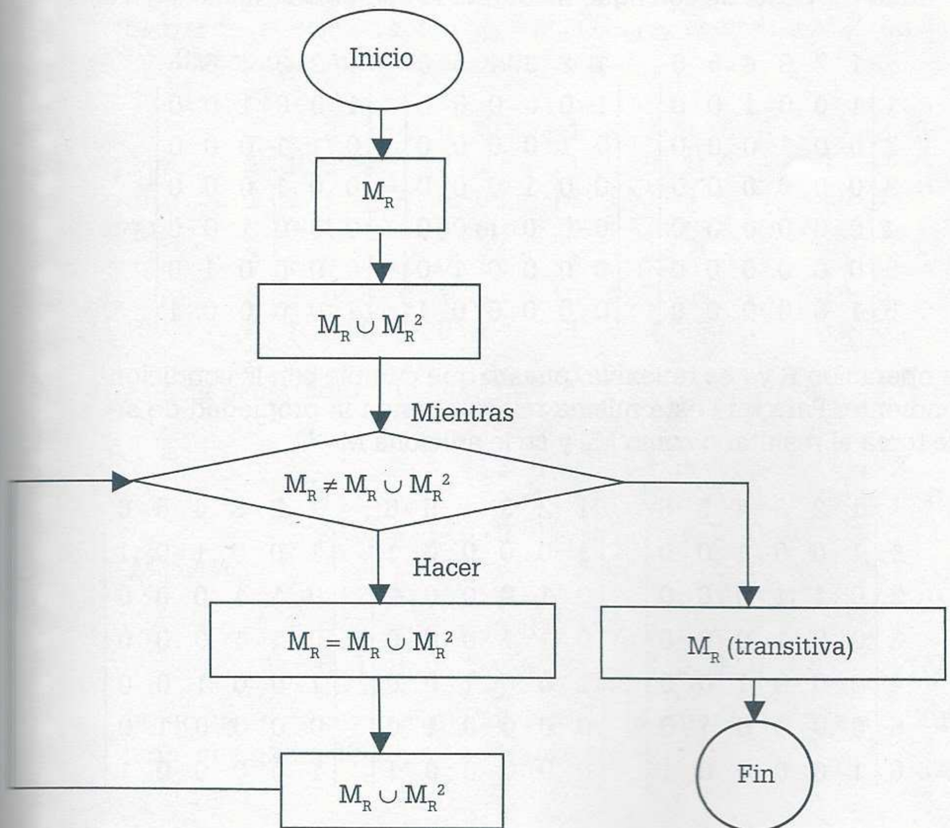


6.4.1 Cerraduras

No todas las relaciones son de equivalencia, pero es posible hacer que tengan esta propiedad agregando los pares ordenados necesarios mínimos para que sean reflexivas, simétricas y transitivas usando para ello las cerraduras. Los diferentes tipos de cerraduras que hay son los siguientes:

- **Cerradura reflexiva**. En este caso se agrega a la relación R la relación identidad para obtener una relación que sea reflexiva ($R \cup I$). La relación identidad (I) es una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal son únicamente unos y los elementos restantes son ceros.
- **Cerradura simétrica**. A la relación R se le agrega la relación inversa R^{-1} para que la relación resultante tenga la propiedad de simetría, esto es, $R \cup R^{-1}$ o usando matrices $M_R \cup M_R^{-1}$.
- **Cerradura transitiva**. A la relación R se agrega la matriz que resulta de multiplicar la relación por ella misma: $M_R \cup M_R^2$.

Pero algunas veces no es suficiente con adicionar una sola vez M_R^2, sino que requiere considerar a ($M_R = M_R \cup M_R^2$), encontrar nuevamente M_R^2 y aplicar otra vez la cerradura ($M_R \cup M_R^2$) hasta que ($M_R = M_R \cup M_R^2$). El método se ilustra más claramente por medio del siguiente algoritmo.



Ejemplo 6.9. Sean A = B = {1, 2, 3, 4, 5, 6} y R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (6, 1)}.

a) Establecer si R es una relación de equivalencia.
b) En caso de no ser relación de equivalencia, aplicar las cerraduras correspondientes para hacer que lo sea.
c) Determinar las clases de equivalencia.
d) Determinar la partición, si la tiene.
e) Dibujar el grafo no dirigido de la relación.

Solución

a) No es una relación de equivalencia ya que no es reflexiva, esto es, no cumple con la propiedad de que aRa $\forall$ a $\in$ A; por ejemplo (2, 2) $\notin$ R. Tampoco es simétrica, ya que no cumple con la condición de que si aRb entonces bRa; por ejemplo (2, 3) $\in$ R pero (3, 2) $\notin$ R. No es transitiva, ya que no se cumple que si aRb y bRc entonces aRc; por ejemplo (6, 1) $\in$ R y (1, 4) $\in$ R pero (6, 4) $\notin$ R.

b) Para hacer que sea reflexiva se le debe agregar la relación identidad (I), y esto se consigue mediante la operación ($M_R \cup I$).

$$M_R \cup I = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \cup \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Con esta operación R ya es reflexiva, puesto que cumple con la condición correspondiente. Para que esta misma relación tenga la propiedad de simetría se toma el resultado como M_R y se le adiciona M_R^{-1}.

$$M_R \cup M_R^{-1} = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \cup \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Ahora la relación resultante tiene las propiedades reflexiva y simétrica. Tomando esta matriz como R y adicionando la relación R^2, ($M_R \cup M_R^2$), se tiene:

$$M_R^2 = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_R \cup M_R^2 = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \cup \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Siguiendo el algoritmo, mientras $M_R \neq M_R \cup M_R^2$ (cosa que es verdadera para nuestro caso) se debe seguir iterando. Considerar ahora la nueva matriz de la relación como $M_R = M_R \cup M_R^2$ y encontrar M_R^2 con esta nueva matriz como se muestra a continuación:

$$M_R^2 = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \odot \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Aplicar la cerradura nuevamente:

$$M_R \cup M_R^2 = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \cup \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{|cccccc|} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Como ya no se cumple que $M_R \neq M_R \cup M_R^2$ por lo tanto este último resultado, que ahora es M_R, ya es transitivo.

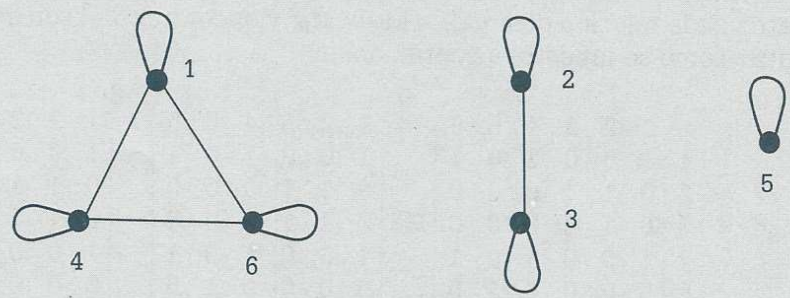
c) La relación resultante ya tiene la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una relación de equivalencia y sus clases de equivalencia son:

$$[1] = \{1, 4, 6\}$$
$$[2] = \{2, 3\}$$
$$[3] = \{2, 3\}$$
$$[4] = \{1, 4, 6\}$$
$$[5] = \{5\}$$
$$[6] = \{1, 4, 6\}$$

d) Su partición está integrada por las clases de equivalencia [1], [2] y [5], ya que ellas contienen todos los elementos del conjunto A y la intersección entre esas clases de equivalencia es vacía.

$$\lambda = \{[1], [2], [5]\} = \{\{1, 4, 6\}, \{2, 3\}, \{5\}\}$$

e) El grafo no dirigido de esta relación de equivalencia está dividido en tres partes, cada una de las cuales corresponde a una clase de equivalencia que integra la partición.



6.5 Operaciones entre relaciones

Así como se pueden realizar operaciones con números también es posible realizar operaciones entre relaciones. Las operaciones que se pueden llevar a cabo con relaciones son: unión, intersección, complemento, composición e inversa de una relación. Estas operaciones se pueden hacer usando matrices o bien con conjuntos.

- **Complemento de R.** Se indica como R′ y contiene todos aquellos pares ordenados que no forman parte de la relación R. Este conjunto incluye a todos los pares ordenados que están en el producto cartesiano A × B pero que no se encuentran en R. Cuando el complemento se obtiene por medio de matrices, se deben cambiar todos los unos por ceros y los ceros por unos.

- **Intersección.** Sean R y S relaciones de un conjunto A en B, entonces se puede obtener $R \cap S$. En términos de relaciones se puede ver que si $a(R \cap S)b$, entonces aRb y aSb. Si se toma a las relaciones como conjuntos, se sabe que la intersección de dos relaciones contiene a todos los pares ordenados comunes a las relaciones R y S. Si la manipulación es por medio de matrices, $M_{R \cap S}$ es el resultado de multiplicar elemento por elemento las matrices booleanas de R y S.

- **Unión.** La unión de dos relaciones $(R \cup S)$ significa que aRb o bien aSb. Los elementos que están en la unión de dos relaciones son todos los pares ordenados que están en R, que están en S, o que están en ambos. Por medio de matrices se lleva a cabo una suma de matrices booleanas entre M_R y M_S para obtener $M_{R \cup S}$.

- **Inversa.** También es posible obtener la inversa R^{-1} de una relación R. Cuando se trabaja con conjuntos se intercambia la posición de a y b, esto implica que si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R^{-1}$. En el caso de matrices, la inversa de M_R es M_R^{-1} que se puede obtener intercambiando filas por columnas en la matriz M_R.

- **Composición.** La composición de relaciones R y S $(R \circ S)$ equivale a la propiedad transitiva, esto significa que si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in S$, entonces $(a, c) \in (R \circ S)$. También es posible obtener la composición de dos relaciones por medio de una multiplicación booleana de las matrices de las relaciones $R \circ S = M_{R \circ S} = M_R \odot M_S$.

Ejemplo 6.10. Sean los conjuntos $A = B = C = D = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones $R: A \to B$, $S: B \to C$, $T: C \to D$, tales que

$R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$
$S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$
$T = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$

Determinar $(S^{-1} \cap R)' \circ (T \cup R')$ por medio de conjuntos y verificar el resultado usando matrices booleanas.

Solución

Usando conjuntos se tiene que

$$S^{-1} = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$$
$$S^{-1} \cap R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 3)\}$$

Por otro lado, se sabe que el producto cartesiano $A \times B$ contiene todos los pares ordenados que resultan de relacionar todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Tomando como referencia $A \times B$ se tiene que:

$$(S^{-1} \cap R)' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

$$R' = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$$

$$(T \cup R') = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$

Para obtener la composición cuando se utilizan conjuntos se deben determinar todos los pares ordenados que se forman al combinar (a, b) con (b, c) para obtener (a, c):

$$(1, 1), (1, 2) \Rightarrow (1, 2)$$
$$(1, 2), (2, 4) \Rightarrow (1, 4)$$
$$(2, 3), (3, 1) \Rightarrow (2, 1)$$
$$(3, 1), (1, 4) \Rightarrow (3, 4)$$
$$(1, 1), (1, 3) \Rightarrow (1, 3)$$
$$(1, 4), (4, 2) \Rightarrow (1, 2)$$
$$(2, 3), (3, 2) \Rightarrow (2, 2)$$
$$(3, 4), (4, 2) \Rightarrow (3, 2)$$
$$(1, 1), (1, 4) \Rightarrow (1, 4)$$
$$(2, 2), (2, 1) \Rightarrow (2, 1)$$
$$(2, 3), (3, 4) \Rightarrow (2, 4)$$
$$(4, 1), (1, 2) \Rightarrow (4, 2)$$
$$(1, 2), (2, 1) \Rightarrow (1, 1)$$
$$(2, 2), (2, 3) \Rightarrow (2, 3)$$
$$(3, 1), (1, 2) \Rightarrow (3, 2)$$
$$(4, 1), (1, 3) \Rightarrow (4, 3)$$
$$(1, 2), (2, 3) \Rightarrow (1, 3)$$
$$(2, 2), (2, 4) \Rightarrow (2, 4)$$
$$(3, 1), (1, 3) \Rightarrow (3, 3)$$
$$(4, 1), (1, 4) \Rightarrow (4, 4)$$
$$(4, 2), (2, 1) \Rightarrow (4, 1)$$

$(4, 2), (2, 4) \Rightarrow (4, 4)$
$(4, 3), (3, 2) \Rightarrow (4, 2)$
$(4, 4), (4, 2) \Rightarrow (4, 2)$
$(4, 2), (2, 3) \Rightarrow (4, 3)$
$(4, 3), (3, 1) \Rightarrow (4, 1)$
$(4, 3), (3, 4) \Rightarrow (4, 4)$

Después de tomar el primer par de $(S^{-1} \cap R)'$ y el otro de $(T \cup R')$, y de llevar a cabo todas las combinaciones, se obtuvo como resultado de la composición el siguiente conjunto:

$(S^{-1} \cap R)' \circ (T \cup R') = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

Usando matrices se tiene lo siguiente.

Para verificar dicho resultado por medio de matrices, es necesario obtener las matrices de las relaciones R, S y T:

$$M_R = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad M_S = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_T = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad M_{S^{-1}} = \begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$M_{S^{-1} \cap R} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cap \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{(S^{-1} \cap R)'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad M_{R'} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{(T \cup R')} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{(S^{-1} \cap R)' \circ (T \cup R')} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \odot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Hay que observar que los resultados obtenidos son los mismos, tanto mediante conjuntos como por matrices.

6.6 Propiedades de las relaciones

Sean los conjuntos A, B, C y D, y las relaciones R: A → B, S: B → C, T: C → D. Entonces se pueden establecer las siguientes propiedades:

- Si $R \subseteq S$, entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.
- Si $R \subseteq S$, entonces $R' \subseteq S'$.
- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
- Si R es reflexiva, también lo es R^{-1}.
- R es reflexiva si y sólo si R′ es irreflexiva.
- Si R y S son reflexivas, entonces también lo son $R \cap S$ y $R \cup S$.
- R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

- R es simétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \varnothing$ cuando $R \neq A \times B$.
- Si R es simétrica, también lo son R' y R^{-1}.
- Si R y S son simétricas, también lo son $R \cap S$ y $R \cup S$.
- R es antisimétrica si y sólo si $(R \cap R^{-1}) \subseteq I$.
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

Aunque se puede verificar que cada una de estas propiedades es válida para relaciones particulares, es recomendable plantear una demostración formal para establecer la validez general de éstas.

Ejemplo 6.11. Sean los conjuntos $A = B = C = D$ y las relaciones $R: A \to B$, $S: B \to C$, $T: C \to D$.

a) Demostrar que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
b) Demostrar que $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

Solución a

Si $(a, b) \in R$ y $(a, b) \in S$ entonces $(a, b) \in (R \cap S)$ y por tanto $(b, a) \in (R \cap S)^{-1}$.

Por otro lado, como $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R^{-1}$. Como $(a, b) \in S$, entonces $(b, a) \in S^{-1}$.

Si $(b, a) \in R^{-1}$ y $(b, a) \in S^{-1}$, entonces $(b, a) \in (R^{-1} \cap S^{-1})$.

Se concluye que $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

Solución b

Si $(a, b) \in S$ o $(a, b) \in T$, entonces $(a, b) \in (S \cup T)$. Si además $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in ((S \cup T) \circ R)$.

Por otro lado, como $(a, b) \in S$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in (S \circ R)$.

Como $(a, b) \in T$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in (T \circ R)$ y por lo tanto $(a, c) \in (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

Se concluye que $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

6.7 Aplicaciones de las relaciones

Como ya se mencionó, las relaciones tienen muchas aplicaciones y en particular las que se presentan a continuación en el área de la computación.

6.7.1 Una lista enlazada es una relación

Sea A un vector de dimensión N que contiene nombres de personas, los cuales fueron colocados de acuerdo con el orden en que llegan, y sea P otro vector de las mismas dimensiones para guardar la dirección del siguiente nombre. Además se considera una variable X que guarda la posición en donde inicia la tabla de nombres.

a) Si el orden en que llegan los nombres es "María", "Juan", "Ana", "Pedro", "Jaime", ¿cuál es el valor de la variable X y cómo quedarían los vectores A y P?

b) ¿Cuál es el grafo dirigido de la relación formada por los arreglos A, P y la variable X?

c) Supóngase que se dan de alta los nombres "Benito" y "Luis" y se da de baja a "Juan". ¿Cómo quedaría la información en los arreglos y cuál es el grafo dirigido?

Solución de (a)

Considérese que la variable que indica el inicio de la lista es X = * y que los arreglos A y P están vacíos, como se muestra en la siguiente tabla:

X = * (* significa fin de lista)

	A		P
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
.		.	
.		.	
N		N	

Al llegar el primer nombre los arreglos quedan de la siguiente manera:

X = 1

	A		P
1	María	1	*
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
.		.	
.		.	
N		N	

La variable X = 1 indica que el primer nombre de la lista está en la posición 1 del arreglo A. El * en P indica que ya no hay más nombres y ahí termina la lista.

Cuando llega el segundo nombre los arreglos tienen la siguiente información:

X = 2

	A		P
1	María	1	*
2	Juan	2	1
3		3	
4		4	
5		5	
.		.	
.		.	
N		N	

Como el nombre de Juan se coloca alfabéticamente antes que María, ahora la variable que indica el inicio de la lista apunta a la posición de ese nombre X = 2. En esa misma posición pero para el arreglo P, se coloca el número 1 que indica que la posición del siguiente nombre a recorrer está en la posición número 1 del arreglo A y el * en P significa que ahí termina la lista.

Al agregar los nombres de Ana, Pedro y Jaime, los arreglos quedan como se muestra a continuación:

X = 3

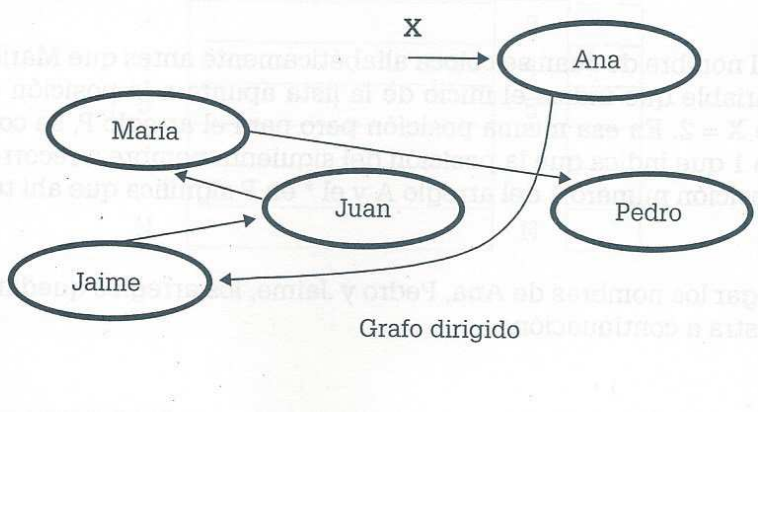
	A		P
1	María	1	4
2	Juan	2	1
3	Ana	3	5
4	Pedro	4	*
5	Jaime	5	2
.		.	
.		.	
N		N	

Hay que observar que al colocar la información de esta forma es posible recorrerla en orden alfabético, permitiendo con ello un acceso más rápido. El primer nombre está en la posición 3, como lo indica la variable X, el que sigue está en la posición 5, como lo indica el arreglo P, el que le sigue en la posición 2, y así sucesivamente hasta llegar al fin de lista indicado por *.

En el contexto de "Estructura de datos" esta forma de arreglar la información se conoce como *lista enlazada* y es utilizada en el ámbito de la computación con la finalidad de acomodar la información de forma que cuando se busque algo se encuentre de manera eficiente. Por ejemplo, si se busca el nombre Jaime se encontraría en el segundo paso ya que está inmediatamente después de Ana y no es necesario recorrer toda la lista. Si se buscara un nombre que no existe en el arreglo, como por ejemplo Carlos, y si se hiciera un programa que además de recorrer la información comparara alfabéticamente los nombres, en el segundo paso mandaría el mensaje de que "Carlos no está en la lista".

Esta lista enlazada también es una relación en la que los nodos son los nombres de las personas, y la flecha que relaciona los nodos es la información del arreglo P. Además de que se indica en dónde comienza el recorrido de la información.

Solución de (b)



Grafo dirigido

Solución de (c)

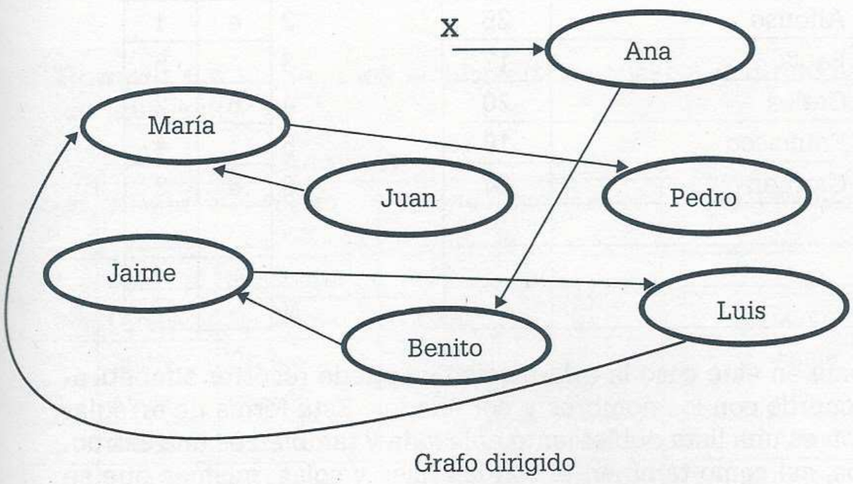
Después de dar de alta los nombres Benito y Luis, y de baja el de Juan, los arreglos quedan de la siguiente manera:

X = 3

	A		P
1	María	1	4
2	Juan	2	1
3	Ana	3	6
4	Pedro	4	*
5	Jaime	5	7
6	Benito	6	5
7	Luis	7	1
.		.	
.		.	
N		N	

En la tabla anterior se observa que cada vez que se da de alta un nuevo nombre, se llevan a cabo los ajustes en los apuntadores, y cuando se da de baja alguna persona simplemente se realiza la desconexión como ocurre con el caso del nombre Juan.

Por otro lado, el grafo queda de la siguiente manera:



Grafo dirigido

En este grafo dirigido se puede observar que el nodo Juan, al desconectarlo, ya no tiene ninguna flecha que apunte hacia él, y aunque él tiene una flecha que apunta a María ésta ya no importa ya que con ella no surte ningún efecto. En computación, para no desperdiciar espacio en memoria, se puede guardar una lista de espacios disponibles y se pueden volver a ocupar cuando se necesiten, de forma que al lugar donde está Juan se le pondría una marca y posteriormente se usaría ese lugar para guardar otro nombre que se quisiera dar de alta.

Lo importante en este caso es observar que una lista enlazada es una relación. Pero aunque en los nodos solamente se representa un dato, realmente puede ser el registro de un archivo o bien una fila de una tabla en donde no solamente se tenga el nombre de la persona, sino otros datos como edad, salario, antigüedad y puesto, entre otros. De esta forma, al llegar al nombre de una persona, se puede acceder también a la información restante.

Ejemplo 6.12. Colocar en un arreglo A los nombres de las personas con sus respectivas edades, y en otro arreglo P los apuntadores correspondientes para recorrer dicha información alfabéticamente o por edades (en orden ascendente) si el orden en que llegan es el siguiente: Mario, 50; Alfonso, 25; Paola, 17; Carlos, 20; Francisco, 18; Carmen, 14. Usar como variables para inicio del recorrido a X para nombres, y a Y para edades.

$X = 2 \quad Y = 6$

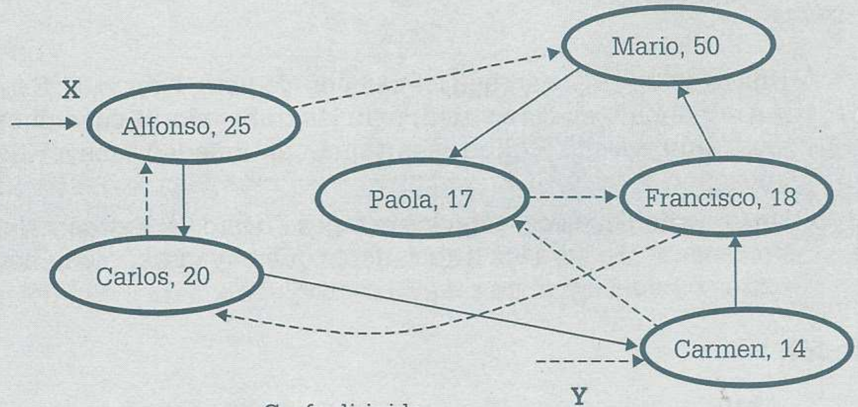
A

1	Mario	50
2	Alfonso	25
3	Paola	17
4	Carlos	20
5	Francisco	18
6	Carmen	14
.		
.		
N		

P

1	3	*
2	4	1
3	*	5
4	6	2
5	1	4
6	5	3
.		
.		
N		

Observar cómo en este caso la información se puede recorrer alfabéticamente, de acuerdo con los nombres y por edades. Esta forma de arreglar la información es una lista doblemente enlazada y también es una estructura de datos, así como también lo son las pilas y colas, mismas que se estudian en "Estructura de datos".



Grafo dirigido

En la figura, las flechas con líneas punteadas muestran el recorrido de la información para la edad y las flechas con líneas continuas para el nombre.

6.7.2 Las relaciones en las bases de datos

Un archivo en una base de datos también es una relación, y es posible llevar a cabo operaciones entre archivos aplicando las operaciones de relaciones. De hecho la aplicación de las relaciones en las bases de datos es muy común y así lo muestran los diferentes manejadores de bases de datos que existen en el mercado, los cuales tratan la información usando el álgebra relacional, esto es, las operaciones entre relaciones: unión, intersección, complementación, multiplicación booleana e inversa.

Ejemplo 6.13. Sean los archivos (relaciones) A y B que se indican a continuación:

Archivo A

Reg.	Nombre	Puesto	Salario	Antigüedad
1	Juan	Supervisor	4 000	5
2	Lorena	Secretaria	3 000	2
3	Jaime	Obrero	1 800	7
4	Alicia	Gerente	8 000	3
5	Alfredo	Obrero	2 100	9
6	Carlos	Supervisor	4 800	6
7	Alberto	Supervisor	2 400	2

Archivo B

Reg.	Nombre	Puesto	H. Semanales	H. Extras
1	Juan	Supervisor	40	0
2	Lorena	Secretaria	40	0
3	Jaime	Obrero	40	12
4	Alicia	Gerente	40	0
5	Alfredo	Obrero	40	8
6	Carlos	Supervisor	40	6
7	Alberto	Supervisor	40	4

Determinar

a) Una relación que contenga los campos Nombre, Puesto, H. Extras y Antigüedad, en este orden, para los trabajadores cuyo puesto sea "Supervisor" y que tengan una "antigüedad" mayor de 5 años.

b) Una relación que contenga los campos Puesto, H. Extras y Nombre, solamente para los trabajadores que hayan trabajado horas extras o bien su puesto sea "Gerente".

Solución

a) Supóngase que se coloca un 1 en las celdas que cumplan con la condición Puesto = "Supervisor" y "Antigüedad" ≥ 5, y un 0 en las demás celdas.

Archivo A

Reg.	Nombre	Puesto	Salario	Antigüedad
1	0	1	0	1
2	0	0	0	0
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0
5	0	0	0	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0

Archivo B

Reg.	Nombre	Puesto	H. Semanales	H. Extras
1	0	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
6	0	1	0	0
7	0	1	0	0

Posteriormente se realiza una unión entre estas dos relaciones.

$A \cup B$

Reg.	Nombre	Puesto	Salario	Antigüedad	H. Semanales	H. Extras
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	1	0	0
7	0	1	0	0	0	0

Al llevar a cabo la intersección (Puesto = "Supervisor") $\cap$ (Antigüedad $\geq$ 5) se obtiene la siguiente relación con los campos que se indican y en el orden en que se solicitan:

Archivo C

Reg.	Nombre	Puesto	H. Extras	Antigüedad
1	0	1	0	1
2	0	1	0	1

Obsérvese cómo el número de registro no se conserva, ya que se trata de una relación nueva. Finalmente se sustituyen los ceros y unos por la información que corresponde para obtener la siguiente relación:

Archivo C

Reg.	Nombre	Puesto	H. Extras	Antigüedad
1	Juan	Supervisor	0	5
2	Carlos	Supervisor	6	6

Nótese cómo las operaciones se llevan a cabo en álgebra booleana y se pueden obtener relaciones de diferentes dimensiones con los campos en el orden deseado.

b) (H. Extras > 0) $\cup$ (Puesto = "Gerente"). Colocando un 1 en las celdas en donde se cumpla la condición y un 0 en donde no sea verdadera se tienen las siguientes relaciones:

Archivo A

Reg.	Nombre	Puesto	Salario	Antigüedad
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	1	0	0
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0

Archivo B

Reg.	Nombre	Puesto	H. Semanales	H. Extras
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	1
4	0	1	0	0
5	0	0	0	1
6	0	0	0	1
7	0	0	0	1

Realizando la unión entre las dos relaciones se obtiene:

A ∪ B

Reg.	Nombre	Puesto	Salario	Antigüedad	H. Semanales	H. Extras
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	1

Tomando solamente los campos solicitados (Puesto, H. Extras, Nombre) en el orden indicado, se tiene la siguiente relación:

Reg.	Puesto	H. Extras	Nombre
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0	1	0
5	0	1	0

Finalmente se coloca la información correspondiente en cada una de las celdas para obtener:

Reg.	Puesto	H. Extras	Nombre
1	Obrero	12	Jaime
2	Gerente	0	Alicia
3	Obrero	8	Alfredo
4	Supervisor	6	Carlos
5	Supervisor	4	Alberto

Es importante mencionar que la colocación de los campos, así como las dimensiones del archivo resultante se obtienen con rutinas propias de los manejadores de bases de datos, pero lo que aquí interesa mostrar es que las operaciones entre relaciones son fundamentales en el campo de bases de datos.

6.8 Funciones

Los lenguajes de programación tradicionales se fundamentan en el concepto de función, y lo mismo ocurre en el caso de los visuales ya que por ejemplo para dibujar una ventana es necesario proporcionar los parámetros que no son otra cosa más que las propiedades del dibujo que al final se obtiene como resultado. Además de las funciones comunes (seno, coseno, raíz cuadrada, logaritmo natural, valor absoluto, etc.), los lenguajes de programación permiten diseñar funciones que pueden servir para realizar operaciones más complejas, y que se pueden usar en otros programas.

Definición. Una función f es una relación que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento b de un conjunto B. Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B se escribe como

$$f: A \rightarrow B$$

Se puede decir que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Para que una relación sea considerada como una función, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

1) El Dom(f) = A. Esto es, el conjunto de los primeros elementos de todos los pares ordenados de la relación es el dominio de la función y también es igual al conjunto A.

2) Si hay dos pares ordenados (a, b) y (a, c) que pertenecen a f, entonces b = c. Esto significa que cada elemento del dominio deberá estar relacionado sólo con un elemento del codominio.

Ejemplo 6.14. Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c}. Determinar si las siguientes relaciones son funciones:

a) R = {(1, b), (2, c), (3, a), (4, b)}
b) R = {(1, a), (2, c), (1, b), (3, a), (4, c)}
c) R = {(1, c), (2, c), (3, c), (4, c)}
d) R = {(1, b), (2, c), (4, a)}

Solución

a) Sí es una función, ya que cumple con las dos propiedades de la definición.

b) No es una función, ya que no satisface la segunda condición. Específicamente, existen al menos dos pares ordenados (1, a) y (1, b), cuyo primer elemento es 1 y $a \neq b$.

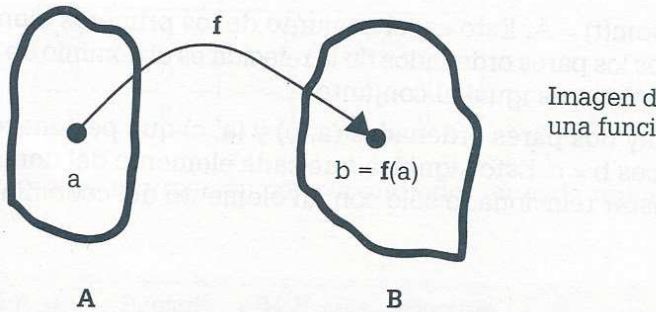
c) Sí es una función ya que satisface las condiciones de la definición planteada.

d) No es una función, ya que $Dom(f) \neq A$.

La propiedad 2 de la definición de función afirma que si $(a, b) \in f$, entonces b está determinada de manera única por a. Por lo tanto, se puede escribir:

$$b = f(a)$$

Esto significa que b está en función de a. También se dice que a es la variable independiente y b la variable dependiente. En computación al elemento a se le llama argumento de la función y a b se le llama valor de la función para el argumento a. A b también se le llama imagen de a bajo f, lo cual se ilustra en la siguiente figura:



De esta forma, dados un valor del parámetro o variable independiente y la función, es posible determinar el valor de la variable dependiente. Por ejemplo, en la expresión $y = \cos(x)$ se tiene que la variable independiente o parámetro es x, la función es cos y la variable dependiente es y. En el caso de $y = x^2 + 3x - 1$ la variable independiente es x, la función es $x^2 + 3x - 1$ y la variable dependiente es y. En general los lenguajes de programación permiten crear esta función de la siguiente manera:

```
Función trinomio (x: real): real;
 inicio
   trinomio: = x * x + 3 * x – 1;
 fin.
```

En este caso el nombre de la función es "trinomio", el parámetro x que se encuentra dentro del paréntesis se define como del tipo real y el valor obtenido de la función también es del tipo real. De esta manera, cuando se llama a la función y = trinomio (0.8) esto significa que el programa va a calcular $y = (0.8)^2 + 3(0.8) - 1$.

Una función puede estar definida para dos o más parámetros o variables independientes, además de incluir la condición de que para éstos siempre se obtenga como resultado un solo valor. Un ejemplo de función de dos variables independientes a partir de las cuales se obtiene un solo valor es la función y = mod(a,b) cuyo valor es el resto que se obtiene al dividir a entre b, de forma que en particular para el caso y = mod(14, 3) se obtiene el valor 2, que es el resto de dividir 14 entre 3. Otro ejemplo es el de la función para obtener el mayor de dos números enteros:

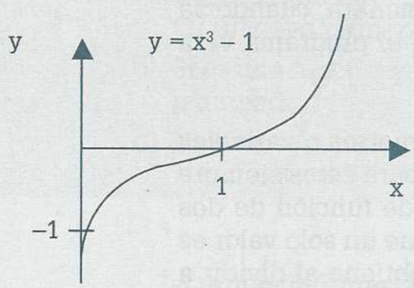
```
Función mayor (a, b: entero): entero;
inicio
  si a > b entonces
    mayor = a
  sino
    mayor = b;
fin.
```

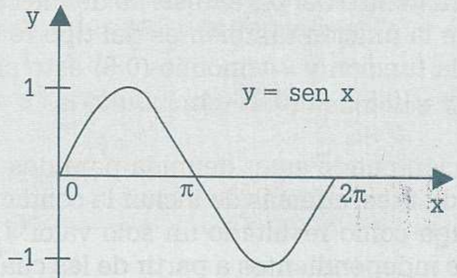
En este caso la función "mayor" recibe dos números enteros, a y b, y obtiene como resultado el mayor de ellos de forma que en el caso de y = mayor(5, 3) se obtiene y = 5.

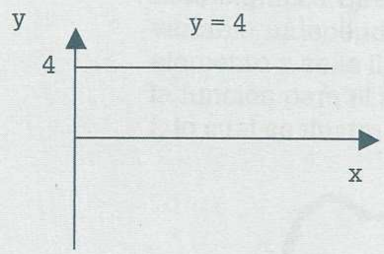
Dado que el objetivo es exponer las funciones desde un punto de vista general, éstas se denotarán como f, g, h, etcétera.

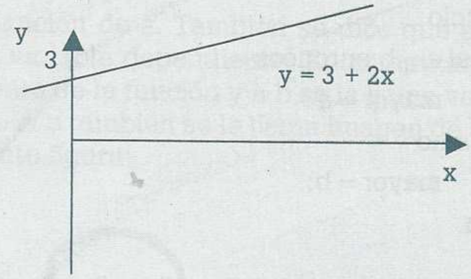
Como las funciones son relaciones, es posible representarlas de diferentes maneras: como conjuntos, matrices, ecuaciones, algoritmos y gráficas.

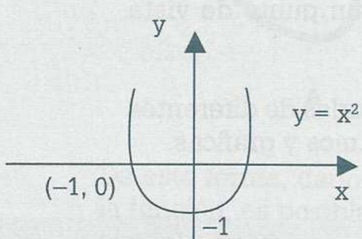
Ejemplo 6.15. Determinar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles a una relación. En todos los casos se tiene que A es el conjunto de los números reales.

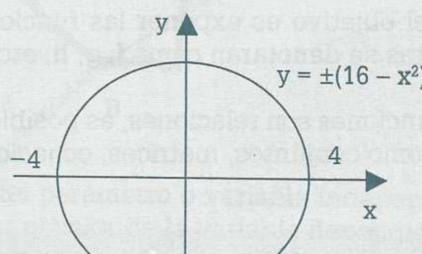






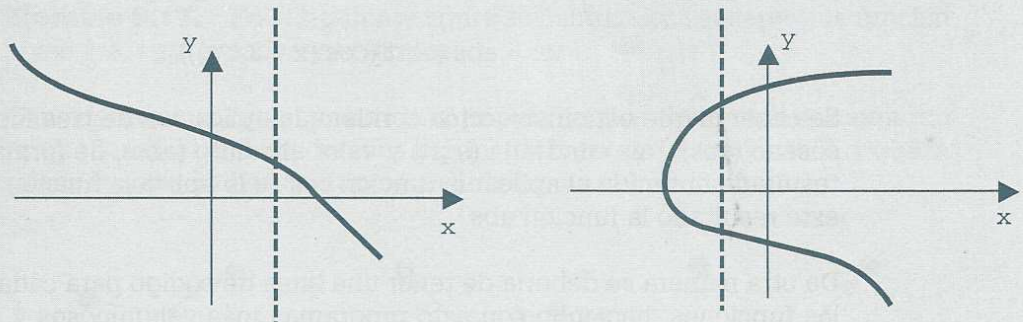






Las primeras cinco gráficas corresponden a una función ya que cumplen con las dos condiciones de la definición, sin embargo la sexta gráfica no es la de una función ya que de su expresión matemática se ve que a un mismo valor de x le corresponden dos de y, por ejemplo $f(4) = f(-4) = 0$, por lo que no cumple con la segunda condición de la definición de función.

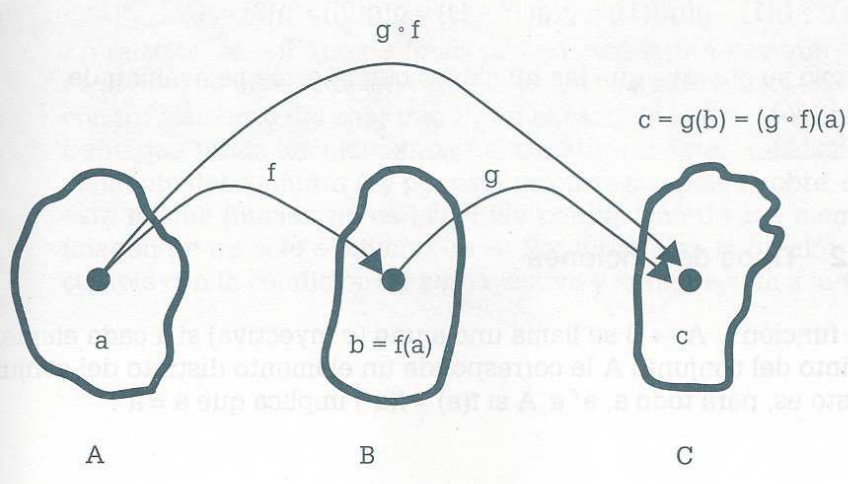
Un criterio que se utiliza para determinar si una gráfica es una función consiste en trazar una recta perpendicular al eje de las abscisas en cualquier parte de éste y ver cuántos puntos de la gráfica intersecta la recta; si sólo intersecta un punto entonces la gráfica corresponde a una función, y si en alguna parte intersecta más de un punto entonces la gráfica no corresponde a una función. En las siguientes dos gráficas se ilustra la aplicación de este criterio.



La primera gráfica corresponde a una función, mientras que la segunda no.

6.8.1 Composición de funciones

Si f: A → B y g: B → C son funciones, entonces la combinación g ∘ f llamada composición también es una función. En la siguiente figura se ilustra el concepto de composición de funciones.



Hay que observar que $(a, c) \in (g \circ f)$ si y sólo si $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$ para alguna $b \in B$, de forma que

$$c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

La composición de funciones es de gran utilidad en el campo de la computación, ya que permite la aplicación de varias funciones en una misma línea de código, dando por resultado programas más compactos. Como ejemplo de esto considérese la siguiente línea de código:

```
w: = abs (sqrt (cos (x – 3 * y)))
```

Se observa que esta instrucción contiene la aplicación de tres funciones, coseno (cos), raíz cuadrada (sqrt) y valor absoluto (abs), de forma que al resultado obtenido al aplicar la función cos se le aplica la función sqrt y a este resultado la función abs.

De otra manera se debería de tener una línea de código para cada una de las funciones, haciendo con esto programas más voluminosos y algunas veces más complejos. Todas las funciones tienen un nombre seguido de argumentos de la función encerrados entre paréntesis: en este caso (x – 3 * y) es el argumento de la función cos, cos(x – 3 * y) es el argumento de la función sqrt y sqrt(cos(x – 3 * y)) es el argumento de la función abs.

Ejemplo 6.16. Sean $A = B = C = R$ y las funciones $f: A \to B$, $g: B \to C$ definidas respectivamente por $f(a) = a^2 - 1$, $g(b) = b + 2$. Entonces:

a) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3^2 - 1) = g(8) = 8 + 2 = 10$
b) $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-1 + 2) = f(1) = (1^2 - 1) = 0$
c) $(g \circ f)(x - 1) = g(f(x - 1)) = g(x^2 - 2x) = x^2 - 2x + 2$
d) $(g \circ g \circ f)(1) = g(g(f(1)) = g(g(1^2 - 1)) = g(g(0)) = g(2) = 4$

En este ejemplo se observa que las funciones compuestas se evalúan de dentro hacia fuera.

6.8.2 Tipos de funciones

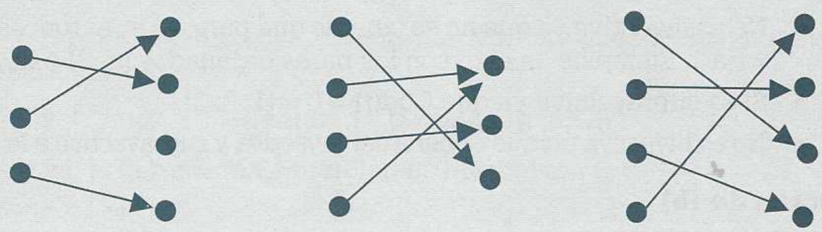
Una función $f: A \to B$ se llama uno a uno (o inyectiva) si a cada elemento distinto del conjunto A le corresponde un elemento distinto del conjunto B, esto es, para todo $a, a' \in A$ si $f(a) = f(a')$ implica que $a = a'$.

Una función f: A → B se llama sobre (o suprayectiva) si el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados de la función es igual al conjunto B, dicho de otra forma, es sobre si Cod(f) = B.

Cuando una función es uno a uno y sobre (o biyectiva), se dice que f tiene una correspondencia uno a uno.

Ejemplo 6.17. En la siguiente figura se ilustran los conceptos de función inyectiva, suprayectiva y biyectiva.

Considérese que los puntos de la izquierda son los elementos del conjunto A, que los puntos de la derecha son los elementos del conjunto B, y que la relación entre ambos conjuntos es la indicada por las flechas.



Función inyectiva | Función suprayectiva | Función biyectiva

En esta figura hay que observar que todos los elementos del conjunto A están relacionados en todos los casos que se muestran, independientemente del tipo de función de que se trate; si no fuera de esta manera no se trataría de funciones ya que no se estaría cumpliendo la primera condición de la definición de funciones.

En relación con el tipo de funciones en esta figura hay que observar que en la función inyectiva cada elemento del conjunto A está relacionado sólo con un elemento del conjunto B; en el caso de la función suprayectiva se tiene que todos los elementos del conjunto B están relacionados con un elemento del conjunto A y por esta razón se considera sobre, sin embargo, esta misma función no es inyectiva porque uno de sus elementos no es imagen de un solo elemento de A. Por último, en la función biyectiva se cumple con la condición de ser inyectiva y suprayectiva a la vez.

Ejemplo 6.18. En cada inciso determinar si la función dada es inyectiva, suprayectiva o biyectiva:

a) A = {a, b, c, d}
B = {1, 2, 3}
f = {(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 1)}

b) A = {1, 2, 3, 4, 5} = B
f = {(1, 3), (2, 5), (4, 3), (3, 5), (5, 1)}

c) A = B = R. Aquí R es el conjunto de los números reales.
f(a) = |a|

d) A = B = {1, 2, 3, 4, 5} y sea f = {(1, 2), (2, 5), (3, 1), (4, 4), (5, 3)}.

Solución de (a)

- No es inyectiva ya que no se cumple que para $a \neq a'$, entonces $f(a) \neq f(a')$. Ejemplos de esto son los pares ordenados (a, 2) y (c, 2).
- Sí es suprayectiva ya que Cod(f) = B = {1, 2, 3}.
- No es biyectiva porque debería ser inyectiva y suprayectiva a la vez.

Solución de (b)

- No es inyectiva ya que no se cumple que para $a \neq a'$ debe ser $f(a) \neq f(a')$, como lo muestran los pares (1, 3) y (4, 3).
- No es suprayectiva ya que Cod(f) ≠ B. Faltan los elementos 2 y 4.
- Obviamente tampoco es biyectiva.

Solución de (c)

- No es inyectiva ya que por ejemplo para $a = -1.7$ y $a' = 1.7$ se tiene que $f(a) = f(a')$ y por lo tanto no se cumple que para $a \neq a'$ debe ser $f(a) \neq f(a')$.
- No es suprayectiva ya que cod(f) ≠ B. Faltan los negativos en el codominio.
- No es biyectiva.

Solución de (d)

- Es inyectiva ya que cada elemento del dominio tiene exclusivamente una imagen del codominio.
- Es suprayectiva, ya que Cod(f) = B.
- Como es inyectiva y suprayectiva a la vez, por lo tanto también es biyectiva.

6.8.3 Funciones invertibles

Una función f: $A \to B$ es invertible si su relación inversa f^{-1} es una función. Específicamente:

a) f^{-1} es una función si y sólo si f es inyectiva y suprayectiva, es decir, es una biyección.

b) Si el inciso (a) se cumple, entonces la función f^{-1} también es una función biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ejemplo 6.19. Sea f: $A \to B$ con $A = \{1, 2, 3\}$ y B = {rojo, verde, azul}. Entonces f = {(1, verde), (2, azul), (3, rojo)}. Obtener f^{-1}.

Solución

Como la función es inyectiva y suprayectiva, entonces es biyectiva y se puede obtener su inversa:

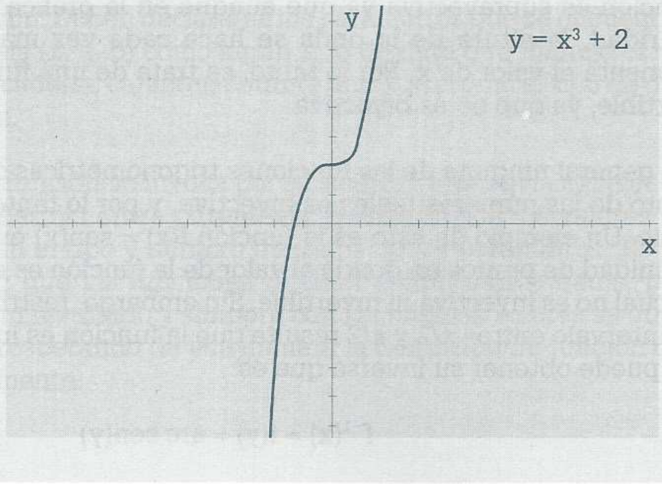
$$f^{-1} = \{(\text{verde}, 1), (\text{azul}, 2), (\text{rojo}, 3)\}$$

Como se ve, esta función f^{-1} también es biyectiva.

Ejemplo 6.20. Sean $A = B = R$ y $f(a) = a^3 + 2$. Obtener la inversa de la función.

Solución

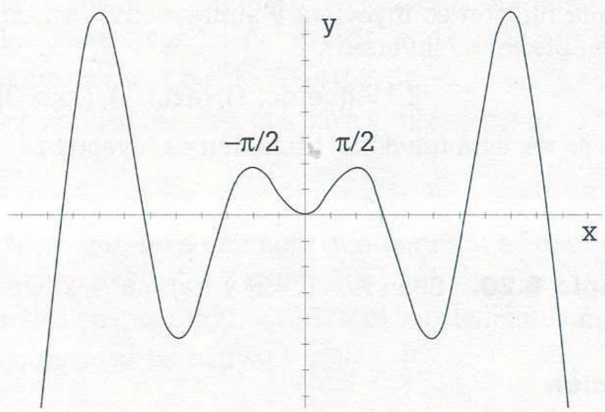
Lo primero que hay que hacer es determinar si la función dada es biyectiva y para esto se observa su gráfica.



A partir de la gráfica se ve que se trata de una función inyectiva, ya que a cada valor $x \in R$ le corresponde un único valor de $y \in R$. También se ve que es suprayectiva, ya que Cod(f) = B = R. Por lo tanto se trata de una función biyectiva e invertible, y su expresión es el resultado de despejar la variable independiente en la función inicial:

$$f(a) = a^3 + 2$$
$$b = a^3 + 2$$
$$a = (b - 2)^{1/3}$$
$$f^{-1}(a) = f(b) = (b - 2)^{1/3}$$

Sea A = B = R y sea la función y = x sen(x) cuya gráfica es la siguiente:



A partir de la gráfica se puede observar que y = x sen(x) no es inyectiva, ya que para infinidad de valores $x \in R$ se tiene que y = 0. Por otro lado, la función es suprayectiva ya que aunque en la gráfica no se observa con claridad, la altura de la onda se hace cada vez mayor a medida que aumenta el valor de x. Por lo tanto, se trata de una función que no es invertible, ya que no es biyectiva.

En general ninguna de las funciones trigonométricas definidas en el conjunto de los números reales es biyectiva, y por lo tanto ninguna es invertible. Un ejemplo de esto es la función f(x) = sen(x) en la cual existe una infinidad de puntos en donde el valor de la función es el mismo, razón por la cual no es inyectiva ni invertible. Sin embargo, restringiendo el dominio al intervalo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ resulta que la función es inyectiva y por tanto se puede obtener su inversa que es:

$$f^{-1}(x) = f(y) = \text{arc sen}(y)$$

Por tanto, para determinar si una función es invertible se debe tener presente su dominio y codominio.

6.9 Aplicación de las funciones

Cada uno de los lenguajes conocidos como Java, C++, Pascal y Basic, tienen funciones integradas al lenguaje como sin(x), abs(x), sqrt(x), mod(x, y) y exp(x), entre otras. Además, en cada uno de los lenguajes es posible crear funciones con características especiales que las funciones estándar no tienen, pero que se consideran necesarias ya sea porque se usan con mucha frecuencia, por que permiten dar claridad al código o porque hacen más compactos los programas. Por ejemplo, si las funciones $y = x^3 - 1$, $potencia = a^b$ se usan frecuentemente en un programa, se pueden crear de la siguiente manera:

```
Función y(x: real): real        Función potencia(a, b: entero): entero
Inicio                          Inicio
   y: = x^3 – 1                    potencia: = a^b
   retornar y                      retornar potencia
fin                             fin
```

Una vez creadas las funciones, simplemente se les pasa el valor o valores por medio de los parámetros que están entre paréntesis y de esa manera se obtiene el resultado. Por ejemplo:

Imprimir y(2)	El resultado que imprime es $7(2^3 - 1)$
r: = potencia(2, 3)	El resultado obtenido es $r = 8(2^3)$

Algunos lenguajes usan la palabra "Función" y otros no, pero a todas las funciones se les da un nombre (en los casos anteriores es *y* y *potencia*), ya que el nombre de la función actúa como variable en la cual se almacena el resultado de la función. Deben declararse los parámetros que se encuentran dentro del paréntesis (x, a, b) como algún tipo de dato que maneje el lenguaje (entero, real, cadena, carácter, flotante, etc.), así como el tipo de dato de la propia función.

Cuando se llama la función se invoca por su nombre y se envía el valor del parámetro (o parámetros) entre paréntesis, cuidando que los valores enviados coincidan con el tipo y número de datos de los parámetros. Es importante mencionar que las funciones pueden recibir varios datos, pero sólo proporcionan un resultado y siempre con los mismos valores se obtiene el mismo valor, respetando de esa manera la definición de función que se expuso anteriormente.

6.10 Resumen

- **Relación.** Una relación R se forma al unir elementos de diferentes conjuntos que cumplen con cierta propiedad o característica. Los elementos que se unen pueden ser de dos, tres o más conjuntos.

Como ejemplo supóngase que se tienen los conjuntos A, B y C, además de que elementos del conjunto A están relacionados con elementos del conjunto B y elementos del conjunto C porque cumplen con ciertas propiedades, de forma que se puede tener una relación R integrada por tripletas. Los conjuntos son

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B = \{a, e, m, p, u\}$
$C = \{verde, azul, café, amarillo\}$

Considérese que R está formada por tripletas que contienen un elemento de A que es divisible entre 3, uno de B que es una letra vocal y uno de C que es un color básico:

$R = \{(3,a,azul),(3,a,amarillo),(3,e,azul),(3,e,amarillo),(3,u,azul),(3,u,amarillo),$
$(6,a,azul),(6,a,amarillo),(6,e,azul),(6,e,amarillo),(6,u,azul),(6,u,amarillo)\}$

Esta relación es una relación trinaria porque está conformada por elementos de tres conjuntos distintos.

Las relaciones más comunes en ciencias de la computación son las relaciones binarias, que están integradas por pares de elementos de dos conjuntos.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una relación binaria R es un conjunto de pares ordenados, en donde el primer elemento a está relacionado con el segundo elemento b por medio de cierta propiedad o característica, lo cual se indica como aRb mientras que para la relación se tiene que

$$\mathbf{R} = \{(a,b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}$$

- **Producto cartesiano (A × B).** Es la combinación de todos los elementos del conjunto A con todos los elementos del conjunto B.

- **Dominio de R (Dom(R)).** Conjunto de todos los primeros elementos de los pares encontrados en una relación.

- **Codominio de R (Cod(R)).** Está conformado por los segundos elementos de los pares de la relación R.

- **Matriz de una relación (M_R).** Si A y B son dos conjuntos finitos y si R es una relación de A en B, es posible representar a R como una matriz M_R donde un elemento de la matriz es

$$\begin{matrix} 1 \text{ si } (a,b) \in R \\ 0 \text{ si } (a,b) \notin R \end{matrix}$$

- **Grafo de una relación (G_R).** Se puede representar una relación por medio de una gráfica integrada por nodos y flechas, y a dicha gráfica se le conoce como "grafo dirigido" de R, en donde los elementos de los conjuntos A y B se representan como nodos y la relación que existe entre dichos elementos se indica por medio de una flecha que va del elemento del conjunto A al elemento del conjunto B con el que está relacionado.

- **Grafos dirigidos y no dirigidos.** En un grafo dirigido se representa la relación entre un elemento del conjunto A y un elemento del conjunto B por medio de una flecha que va de a hacia b. Sin embargo en un grafo no dirigido la relación es en ambos sentidos, esto significa que aRb y que bRa, por esa razón la relación se representa por una sola línea sin cabeza de flecha.

- **Propiedades de las relaciones.** En una relación es común que los elementos de A también sean elementos de B, es decir que A = B. Por ejemplo en una red de computadoras A y B tienen los mismos elementos porque relacionan computadoras, en una red carretera A y B tienen los mismos elementos porque relacionan ciudades, o en una red de agua potable A y B tienen los mismos elementos porque relacionan válvulas. Cuando ocurre que A = B, las relaciones pueden tener una, varias o ninguna de las siguientes propiedades:

Propiedad	Condición
Reflexiva	aRa; $\forall a \in A$. Esto es: todos los elementos de A están relacionados consigo mismos.
Irreflexiva	$(a,a) \notin R$ $\forall a \in A$. Esto es: ningún elemento de A está relacionado con él mismo.
Simétrica	Cuando $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$, o bien cuando $(a,b) \notin R$ entonces $(b,a) \notin R$. Esto es: los elementos simétricos de la relación son iguales.
Asimétrica	Cuando $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \notin R$, además si $a = b$ entonces $(a,a) \notin R$. Esto es: en ningún caso los dos pares simétricos están en la relación.
Antisimétrica	$(a,b) \notin R$ o bien $(b,a) \notin R$. Esto es: cuando $a \neq b$ en ningún caso los dos pares simétricos están en la relación.
Transitiva	*Si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.* Esto es: cuando aRb y bRc entonces aRc.

- **Relación de equivalencia.** Es aquella que es reflexiva, simétrica y transitiva. Si la relación es la comunicación en una red de computadoras, dicha red debe ser una relación de equivalencia, porque toda computadora se puede comunicar con ella misma (reflexiva), si la computadora X se puede comunicar con la computadora W entonces la computadora W se puede comunicar con la X (simétrica). Si la computadora X se puede comunicar con la W y la computadora W se puede comunicar con la Z, entonces la computadora X se puede comunicar con la computadora Z (transitiva).

- **Clases de equivalencia [a].** Son conjuntos que contienen a todos los elementos $b \in B$ que están relacionados con $a \in A$.

$$[a] = \{b \mid b \in B,\ aRb\}$$

- **Partición (λ).** Es un conjunto de clases de equivalencia con las siguientes propiedades:

  a) Deberán estar contenidos todos los elementos del conjunto A.
  b) La intersección entre las clases de equivalencia debe ser vacía $\lambda = \{[a] \mid a \in A$; la intersección entre clases de equivalencia es vacía$\}$

- **Cerraduras.** No todas las relaciones son de equivalencia, pero es posible hacer que tengan esta propiedad agregando los pares ordenados necesarios mínimos usando para ello las cerraduras: reflexiva ($R \cup I$), simétrica ($R \cup R^{-1}$) y transitiva ($R \cup R^2$).

- **Operación entre relaciones.** De la misma manera como se realizan operaciones entre conjuntos, también se pueden llevar a cabo las siguientes operaciones entre relaciones:

  a) Complemento de R (R′). Son a todos los pares ordenados que están en el producto cartesiano $A \times B$ pero que no están en R.
  b) Intersección de R y S ($R \cap S$). Sean R y S relaciones de un conjunto A en B, entonces se puede formar $R \cap S$. En términos de relación se puede ver que si $a(R \cap S)b$, entonces aRb y aSb. Por medio de matrices $M_{R \cap S}$ es el resultado de multiplicar elemento por elemento las matrices booleanas de R y S.
  c) Unión de R y S ($R \cup S$). La unión de dos relaciones ($R \cup S$) significa que aRb o bien aSb. Por medio de matrices se lleva a cabo una suma de matrices booleanas entre M_R y M_S para obtener $M_{R \cup S}$.
  d) Inversa de R (R^{-1}). La inversa de R se encuentra intercambiando la posición de a y b, esto implica que si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R^{-1}$. En el caso de matrices la inversa se encuentra intercambiando filas por columnas (M_R^{-1}).

e) **Composición de R y S (R ∘ S).** La composición de relaciones R y S equivale a la propiedad transitiva, esto significa que si (a,b)∈ R y (b,c)∈ S, entonces (a,c)∈ (R ∘ S). Es posible también encontrar la composición de dos relaciones por medio de una multiplicación booleana de las matrices de las relaciones

$$(R \circ S = M_{R \circ S} = M_R \cdot M_S).$$

- **Una función f.** Asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento b de un conjunto B. Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A en B se escribe f: A → B.

Se puede decir que todas las funciones son relaciones, pero no todas las relaciones son funciones. Para que una relación sea considerada como una función, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

a) Dom(f) = A, esto es, el conjunto de los primeros elementos de todos los pares ordenados de la relación es el dominio de la función y también es igual al conjunto A.
b) Los elementos del dominio solamente deberán estar relacionados con un elemento del codominio.

- **Función inyectiva (o uno a uno).** Una función f: A → B se llama inyectiva, si a cada elemento distinto del conjunto A corresponde un elemento distinto del conjunto B.

- **Función suprayectiva (o sobre).** Una función f: A → B se llama suprayectiva, si el conjunto de los segundos elementos de los pares ordenados de la función es igual al conjunto B.

- **Función biyectiva (o correspondencia uno a uno).** Cuando una función f es inyectiva y suprayectiva a la vez, se dice que es biyectiva.

- **Función invertible.** Una función f: A → B es invertible si su relación inversa f^{-1} es también una función. Por otro lado, una relación es invertible si se trata de una función biyectiva.

- **Aplicación de las relaciones.** Las relaciones se pueden aplicar en bases de datos si un archivo se considera como una relación (o en otro contexto, una base de datos). También se aplican en estructuras de datos ya que una relación es una lista enlazada, una pila y también un árbol. Otra aplicación es en teoría de grafos partiendo de que una relación también es un grafo. En programación también se aplican ya que una función es una relación con ciertas características.

6.11 Problemas

6.1 Sean A = B = C = {1, 2, 3, 4, 5}, R: A → B tal que

R = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)}

y S: B → C tal que bSc si y sólo si a ≥ b y b es impar.

a) Obtener los pares ordenados de la relación S.

b) Determinar M_R y M_S.

c) ¿Cuál es el grafo dirigido de R y cuál el de S?

d) Explicar si las relaciones R y S tienen algunas de las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y transitiva.

e) Las relaciones R y S ¿son de equivalencia? Si no lo son, hacer que lo sean aplicando las cerraduras correspondientes. Encontrar después las clases de equivalencia y la partición.

f) Determinar $M_{(R' \cap S)}{}^{-1}$.

g) La relación obtenida en el inciso (f) ¿es de equivalencia?

6.2 Sean A = B = C = {1, 2, 3, 4}, R: A → B tal que aRb si y sólo si a = b y S: B → C tal que bSc si y sólo si b es par y c es múltiplo de 4.

a) Determinar los pares ordenados de R y S.

b) Determinar el producto cartesiano A × B.

c) Obtener el dominio y codominio de R y S.

d) ¿Cuáles son los grafos dirigidos de R y S?

e) ¿Cuáles son las matrices de R y S?

f) Obtener $(R' \cap S) \circ S^{-1}$.

g) La relación obtenida en el inciso (f) ¿es una relación de equivalencia? En caso de no ser así, hacer que lo sea aplicando las cerraduras: reflexiva, simétrica y transitiva.

h) Obtener las clases de equivalencia y partición de la relación.

i) ¿Cuál es el grafo dirigido y qué diferencia existe con el grafo no dirigido?

6.3 Sean $A = B = C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R: A \to B$ y $S: B \to C$, donde:

$R = \{(1, 1), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (5, 5)\}$

$S = \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

a) Obtener $M_{(S^{-1} \cap R) \circ S'}$.

b) Explicar si tiene o no las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica o transitiva.

c) ¿Cuál es su grafo dirigido?

6.4 Sean $A = B = C = D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R: A \to B$ en donde aRb si y sólo si a es par y b es primo, $S: B \to C$ en donde bSc si y sólo si c es divisible entre 3 y $T: C \to D$ donde $T = \{(1, 1), (3, 4)\}$.

a) Obtener los pares ordenados de las relaciones R y S.

b) Calcular los productos cartesianos $A \times B$ y $C \times D$. ¿Qué diferencia existe entre estos dos productos cartesianos en este caso? Si los conjuntos A, B, C y D tuvieran diferentes elementos ¿ocurriría lo mismo?

c) Explicar si las relaciones R, S y T tienen una o varias de las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica, transitiva.

d) Alguna de las relaciones R, S o T es una relación de equivalencia (explique). En caso de ser así, obtener las clases de equivalencia y partición.

e) Representar las relaciones R, S y T como matriz y como grafo dirigido.

f) Establecer si las relaciones R, S y T cumplen con todo lo necesario para ser consideradas una función (justificar su respuesta).

g) Obtener $(R \cup T^{-1}) \cap (S^{-1} \cap R') \circ T)^{-1}$.

h) La relación obtenida en el inciso (g) ¿es una relación de equivalencia? En caso de no ser así, hacer que lo sea aplicando las cerraduras correspondientes.

i) Obtener las clases de equivalencia y partición de la relación obtenida en el inciso (h).

j) Obtener el grafo dirigido y no dirigido de la relación obtenida en el inciso (h).

6.5 Sean $A = B = Z^+$, donde aRb si y sólo si $|a - b| \leq 3$.

a) Explicar si R tiene o no alguna de las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y transitiva.

b) ¿R es una relación de equivalencia? Si no lo es, ¿qué propiedad o propiedades le hacen falta para serlo?

6.6 Sean $A = B = C = D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R: A \to B$, $S: B \to C$ y $T: C \to D$, donde $R = \varnothing$, $S = B \times C$ y $T = \{(2, 3)\}$.

a) Explique si las relaciones R, S y T tienen las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y transitiva.

b) ¿Alguna de las relaciones R, S y/o T son relaciones de equivalencia? Explique su respuesta.

6.7 Sean $A = B = C = D = \{1, 2, 3, 4\}$, $R: A \to B$, $S: B \to C$ y $T: C \to D$, donde:

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4)\}$

$S = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (4, 3)\}$

$T = \{(3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 2)\}$

a) Obtener $M_{(T^{-1} \cup S) \cap (R' \circ T)}$.

b) Si la relación resultante en el inciso (a) no es una relación de equivalencia, hacer que lo sea aplicando las cerraduras reflexiva, simétrica y transitiva.

c) Obtener las clases de equivalencia y partición.

d) ¿Cuál es el grafo dirigido y no dirigido de la relación que resulta en el inciso (b)?

6.8 Sean $A = B = C$, $R: A \to B$ y $S: B \to C$. Demostrar que:

a) R es asimétrica si y sólo si $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

b) $(R \cap S)^2 \subseteq (R^2 \cap S^2)$.

6.9 Sean $A = B = C$, $R: A \to B$ y $S: B \to C$. Demostrar que:

a) Si $R \subseteq S$ entonces $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

b) R es antisimétrica si y sólo si $(R \cap R^{-1}) \subseteq I$.

6.10 Resolver cada uno de los siguientes incisos:

a) Sean A = B = {1, 2, 3, 4, 5} y R: A → B, donde

R = {(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1)}

- Explicar si tiene alguna o varias de las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y/o transitiva.
- Si la relación anterior no es de equivalencia, hacer que lo sea aplicando las cerraduras correspondientes.
- Obtener las clases de equivalencia y la partición (si ésta existe).

b) Sean A = B = C = {a, b, c, d, e}, R: A → B y S: A → B, donde:

R = {(a, c), (a, d), (a, e), (b, a), (b, b), (b, d), (c, a), (c, d), (d, c), (e, a), (e, b), (e, d), (e, e)}

S = {(a, a), (a, c), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (c,b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, a), (d, b), (d, e)}

- Obtener $((R \cap S^{-1}) \circ (S' \cup R^{-1}))'$. Hacerlo por conjuntos y ratificar dicho resultado por medio de matrices.
- Explicar si la relación obtenida tiene alguna o varias de las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y/o transitiva.
- Cuál es el grafo dirigido de la relación resultante y establecer si se trata de una relación de equivalencia. Si no es así ¿cuál es el menor número de pares ordenados que le faltan para que lo sea?

c) Sean A = B = C = {1, 2, 3, 4, 5}, R: A → B y S: A → B, donde

R = {(1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 1), (5, 3), (5, 5)}

S = {(b, c) | b ∈ B, c ∈ C, bRc si y sólo si b es primo y c es par}

- Obtener $(R' \circ (S^{-1} \cup R^{-1}))$ por medio de matrices y de conjuntos.
- Explicar si la relación resultante tiene alguna o varias de las siguientes propiedades: reflexiva, irreflexiva, simétrica, asimétrica, antisimétrica y/o transitiva.
- Cuál es el grafo dirigido de la relación resultante y establecer si se trata de una relación de equivalencia.

d) Sean $A = B = C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R: A \to B$ y $S: A \to B$, donde

$$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 5)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Demostrar que:

- $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
- $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.
- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.
- $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

6.11 Guardar nombres de personas en un arreglo A, la posición del siguiente nombre en un arreglo P y el inicio del recorrido de la información en la variable X. El orden en que llegan los nombres es "Lorena", "Miriam", "Gustavo", "Alicia", "Fernando", "Juan".

a) ¿Cuál es el contenido de los arreglos A y P así como el de la variable X, si se desea recorrer los nombres alfabéticamente en forma ascendente?

b) Si se da de baja a "Fernando" y se dan de alta "José" y "Alejandra" ¿de qué manera quedarán los arreglos?

c) ¿Cuál es el grafo dirigido de los arreglos A y P, así como el de la variable X, en este momento?

d) ¿Cómo quedarían los arreglos si en lugar de acomodar la información para consultarla en forma ascendente, se desea hacer dicha consulta en forma descendente?

6.12 Se desea guardar los salarios en un arreglo A, la posición del siguiente salario en un arreglo P y el inicio del recorrido de la información en la variable X. El orden en que llegan los datos es 3 000, 4 000, 2 000, 5 000, 3 000, 3 500.

a) ¿Cuál es el contenido de los arreglos A y P, así como el de la variable X, si se desea recorrer la información de manera ascendente?

b) ¿Cuál es el grafo dirigido en este momento?

c) Si se da de baja el salario cuyo monto es 3 000 y se dan de alta 2 500 y 4 300, ¿cómo quedarían los arreglos?

d) ¿Cuál de los dos 3 000 fue dado de baja y por qué?

e) ¿Cuál es el grafo dirigido en este momento?

f) ¿Cómo quedaría la información si al arreglo P se le adiciona otra columna para recorrer la información en forma descendente, y se considera a la variable Y para indicar el inicio de esta lista?

6.13 Colocar en un arreglo A los nombres de personas con su respectiva edad, y en otro arreglo P los apuntadores correspondientes para recorrer dicha información alfabéticamente o por edades. El orden en que llega la información es "Francisco", 30; "Fausto", 18; "Arturo", 22; "Alberto", 32; "Lidia", 23; "Berta", 20. Usar X como variable para iniciar el recorrido de los nombres, y Y para indicar el inicio del recorrido de las edades.

a) ¿Cuál es el contenido de los arreglos A y P, así como el de las variables X, Y, si se desea recorrer los nombres alfabéticamente (ascendente) y las edades en forma descendente?

b) ¿Cuál es el grafo dirigido en este momento?

c) Si se da de alta a "Pedro", 13 y se da de baja a "Fausto", 18, ¿de qué forma quedarían los arreglos?

6.14 Colocar en un arreglo A el nombre de personas con su respectiva antigüedad, y en otro arreglo P los apuntadores correspondientes para recorrer dicha información alfabéticamente y por antigüedad. El orden en que llega la información es "Sandra", 3; "Carmen", 5; "Pablo", 1; "Alfonso", 2; "Santiago", 4; "Elena", 1. Usar X como variable para iniciar el recorrido de los nombres, y Y para inicio del recorrido de la antigüedad.

a) ¿Cuál es el contenido de los arreglos A y P, así como el de las variables X y Y, si se desea recorrer los nombres alfabéticamente (ascendente) y la antigüedad en forma ascendente?

b) ¿Cuál es el grafo dirigido en este momento?

c) Si se da de alta "Alfredo", 2, "Fermín", 4, y de baja "Elena", 1, ¿de qué forma quedarían los arreglos?

d) ¿Cuál es el grafo dirigido en este momento?

e) Si ahora se agrega una columna a P y se usa la variable Z para recorrer también los nombres en forma descendente, ¿cómo quedarían los arreglos?

6.15 Considérense los archivos A y B que se muestran a continuación:

Relación A

Reg.	Código	Nombre	Departamento
1	3 427	José	Mantenimiento
2	6 072	Pedro	Producción
3	8 611	Alicia	R. Humanos
4	7 512	Fernando	Producción
5	5 825	Carlos	Producción
6	7 020	Carmen	Contabilidad

Relación B

Reg.	Código	Puesto	Salario
1	3 427	Supervisor	4 300
2	6 072	Obrero	3 000
3	8 611	Secretaria	2 800
4	7 512	Obrero	3 200
5	5 825	Supervisor	5 000
6	7 020	Secretaria	3 000

Obtener:

a) Una relación con los campos Nombre, Puesto y Salario. Para las personas cuyo Departamento = "Producción" y Salario ≥ 3 100.

b) Una relación con los campos Código, Puesto y Departamento para las personas cuyo Puesto = "Obrero" o bien (Puesto = "Secretaria" y Departamento = "Contabilidad").

c) Una relación que contenga los campos Nombre, Departamento y Salario de todos los trabajadores que no pertenezcan al Departamento de producción.

6.16 Sean las relaciones A y B que se muestran a continuación:

Relación A

Reg.	Código	Producto	Precio
1	2 010	Galletas	3.00
2	3 040	Detergente	12.00
3	5 513	Mermelada	15.00
4	1 728	Aceite	16.00
5	6 724	Arroz	16.00
6	3 319	Frijol	18.00
7	6 502	Azúcar	20.00
8	3 045	Detergente	14.00
9	1 717	Aceite	18.00

Relación B

Reg.	Código	Presentación	Contenido
1	2 010	Paquete	250 gr.
2	3 040	Bolsa	600 gr.
3	5 513	Frasco	250 ml
4	1 728	Frasco	1 000 ml
5	6 724	Bolsa	1 000 gr.
6	3 319	Bolsa	1 000 gr.
7	6 502	Bolsa	2 000 gr.
8	3 045	Bolsa	600 gr.
9	1 717	Frasco	1 000 ml

Obtener:

a) Una relación con los campos Código, Producto, Presentación y Precio. Con Producto = "Detergente" o Presentación = "Bolsa".

b) Una relación con los campos Producto, Contenido y Precio. Para Precio ≥ 15.00 y (Contenido < 1 000 gr. o Contenido < 500 ml).

c) Una relación con los campos Código, Producto, Presentación, Contenido y Precio. Para Código = 5 513.

d) Relación con los campos Código, Producto y Presentación. Para Producto = "Detergente".

6.17 Sean los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {a, b, c, d}. Para cada uno de los siguientes incisos:

- Indicar si la relación dada también es una función.
- Determinar Dom(R) y Cod(R).
- En caso de ser función, verificar si es inyectiva, supra-yectiva y/o biyectiva.
- En caso de ser una función invertible, ¿cuál es f^{-1}?

a) R = {(1, a), (2, b), (3, d), (4, c)}
b) R = {(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)}
c) R = {(1, b), (1, c), (2, a), (2, d)}
d) R = {(1, c), (2, c), (3, d), (4, d)}

6.18 Sean A = {1, 2, 3} y B = {a, b, c, d}. En relación con cada uno de los incisos:

- Indicar si la relación también es una función.
- Determinar Dom(R) y Cod(R).
- En caso de ser función, determinar si es inyectiva, su-prayectiva y/o biyectiva.
- En caso de ser una función invertible, ¿cuál es f^{-1}?

a) R = {(1, a), (2, a), (3, a)}
b) R = {(1, a), (2, b), (2, c), (3, d)}
c) R = {(1, c), (2, b), (3, c), (3, a)}
d) R = {(2, a), (2, b), (2, c), (d, d)}

6.19 Sean A = B = R; $f(x) = -4x^3 - 2$; $g(y) = 3y^2 - 1$; $h(z) = 5z + 3$.

a) Demostrar que en cada caso realmente se trata de una función, y para esto utilizar la gráfica correspondiente.
b) Establecer si son funciones invertibles, y si es así obtener la inversa.
c) Determinar el valor de la composición $f \circ h \circ g \circ g(2)$ y $g \circ f \circ h \circ f(-x)$.

6.20 En cada uno de los siguientes incisos:

- Demostrar que se trata de una función utilizando un bosquejo de su gráfica.
- Establecer si se trata de una función invertible, y en caso de ser así obtener su inversa.

a) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 8)^4}{\dfrac{5}{3}} + \dfrac{1}{7}$

para $A = \{x \mid x \in R;\ x > 2\}$; $B = \{x \mid x \in R;\ x > 1\}$.

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 1}}{7} + \dfrac{9}{5}$

para $A = \{x \mid x \in R;\ x > 1\}$; $B = \{x \mid x \in R;\ x > 2\}$.

c) $f(x) = 3tg(x)$ para $A = \{x \mid x \in R;\ -1 < x < 1\}$; $B = R$.

d) $f(x) = sen(x)$
para $A = \{x \mid x \in R;\ \pi < x < 3\pi\}$; $B = \{x \mid x \in R;\ -1 < x < 1\}$.

e) $f(x) = 3(-1)^{n+1}$ para $A = N$; $B = \{x \mid x \in Z;\ -3 \le x \le 3\}$

6.21 Sean $A = B = C = D = R$, $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$ definidas por

$f(a) = 3a + a^3$, $g(b) = b^5$, $h(c) = c + 1$. Obtener:

a) $g \circ f(2)$

b) $f \circ g(x - 1)$

c) $g \circ f \circ h\ (x)$

d) $f \circ g \circ h\ (-x)$

6.22 Sean A = B = C = D = R, f: A → B, g: B → C, y h: C → D definidas por

$f(a) = -a^3$, $g(b) = b^2 - 1$, $h(c) = 3c + 1$. Obtener:

a) $f \circ g \circ f(-1)$
b) $f \circ g \circ g(1 - x)$
c) $g \circ g \circ f \circ h(-x)$
d) $f \circ f \circ g \circ h(2x)$

6.23 Diseñar un algoritmo en donde al dar dos números enteros positivos, el algoritmo encuentre el mínimo común múltiplo de a y b usando para ello una función.

6.24 Diseñar un algoritmo que contenga una función para:

a) Obtener el mayor de 3 números enteros positivos mayor (x, y, z).
b) Obtener el máximo común divisor de dos números enteros positivos mcd(a, b).
c) Dado un número entero positivo, determinar si éste es primo o no.
d) En algunos lenguajes se utilizan algoritmos para elevar una cantidad a cualquier potencia. Si $x^n = e^{nLn(x)}$, donde n, x ∈ R, e = 2.7182, es la base de los logaritmos y Ln(x) es el logaritmo natural de x. Dados dos número reales x y n encontrar con la función anterior x^n.

6.25 Diseñar algoritmos para determinar si una relación es:

a) Reflexiva.
b) Irreflexiva.
c) Simétrica.
d) Asimétrica.
e) Antisimétrica.
f) Transitiva.

6.26 Diseñar algoritmos para llevar a cabo las siguientes operaciones entre relaciones:

a) Unión.
b) Intersección.
c) Complementación.
d) Inversa.
e) Composición.