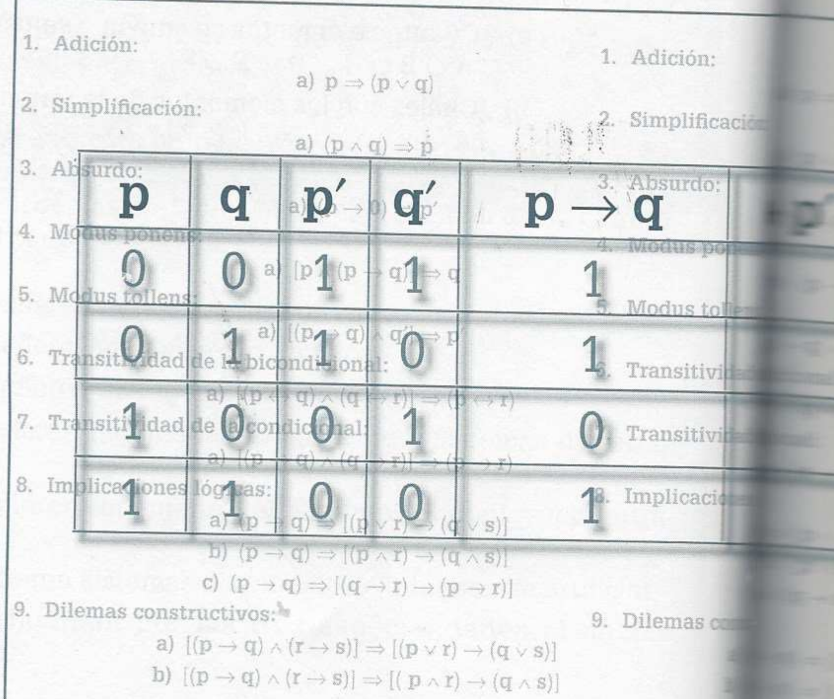
CAPÍTULO IV

Lógica matemática



$$(p \to q) \leftrightarrow (q' \to p')$$

1. Adición:
   a) $p \Rightarrow (p \vee q)$
2. Simplificación:
   a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
3. Absurdo:
   a) $(p \to 0) \Rightarrow p$
4. Modus ponens:
   a) $[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$
5. Modus tollens:
   a) $[(p \to q) \wedge q'] \Rightarrow p'$
6. Transitividad de la bicondicional:
   a) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow$
7. Transitividad de la condicional:
   a) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p$
8. Implicaciones lógicas:
   a) $(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s$
   b) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s$
   c) $(p \to q) \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to$
9. Dilemas constructivos:
   a) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to$
   b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to$

La lógica llena el mundo; los límites del mundo son también sus límites.

Ludwig Wittgenstein

Objetivos

- Entender el concepto de proposición y la forma en que se pueden elaborar proposiciones compuestas usando los conectores lógicos.
- Evaluar proposiciones lógicas por medio de tablas de verdad.
- Comprender los conceptos de tautología, contradicción, equivalencia lógica y regla de inferencia.
- Aprender a representar enunciados en forma de teorema usando para ello simbología lógica.
- Demostrar teoremas por medio del método deductivo directo y contradicción.
- Distinguir entre argumentos válidos y no válidos.
- Representar predicados con notación lógica, usando los cuantificadores existencial y universal.
- Demostrar proposiciones por medio de inducción matemática.

4.1 Introducción

Breve cronología de la lógica

La lógica tuvo su origen en los estudios que llevó a cabo Aristóteles (384-322 a.C.), quien introdujo los cuantificadores universal (∀) y existencial (∃) que ahora se usan frecuentemente en lógica de predicados. Posteriormente en la época de oro de los griegos se trató de usar la lógica para llevar a cabo la demostración formal de las principales leyes matemáticas conocidas, y mucho tiempo después fue Giusseppe Peano el que le dio el nombre de "lógica matemática".

Un desarrollo importante de la lógica matemática ocurrió a mediados del siglo XIX, cuando Leibniz trató de potenciar el razonamiento representando un problema por medio de hipótesis para llegar a una conclusión. También en este siglo George Boole y Augusto De Morgan diseñaron una nueva manera de representar un problema usando para ello los principios fundamentales de la lógica matemática.

A finales del siglo XIX y principios del XX el matemático Británico Alfred North Whitehead y su discípulo Bertrand Russell publicaron los resultados de sus investigaciones que afirmaban que todas las leyes matemáticas se pueden traducir en proposiciones lógicas verdaderas, lo cual significa que el vocabulario matemático es un subconjunto del vocabulario lógico y por lo tanto cualquier demostración lógica es equivalente a cualquier demostración matemática.

Pero fue a mediados del siglo XX cuando la lógica matemática adquirió una destacada importancia con la creación y desarrollo de la computadora, y ahora en el siglo XXI la importancia es mayor al tratar de dotar a las computadoras y robots de una inteligencia artificial que les permita tomar decisiones, al relacionar la información conocida y aplicar reglas de inferencia para llegar a una conclusión.

La lógica estudia la forma del razonamiento, es una disciplina que por medio de reglas y técnicas determina si un teorema es falso o verdadero, además de que es ampliamente aplicada en filosofía, matemáticas, computación y física.

En filosofía la lógica se utiliza para establecer si un razonamiento es válido o no. Tomando en cuenta que una frase puede tener diferentes interpretaciones, en este caso la lógica permite saber el significado correcto.

En matemáticas la lógica es una herramienta útil para demostrar teoremas e inferir resultados, así como para resolver problemas.

En la computación la lógica se aplica en la elaboración y revisión de programas, en el estudio de lenguajes formales y la relación existente entre ellos, así como en la obtención de resultados en forma recursiva.

Con el apoyo de la lógica, en el área de la inteligencia artificial se logra que una máquina tome decisiones precisas.

En la física, la lógica se necesita tanto para establecer el procedimiento para llevar a cabo un experimento como para interpretar los resultados obtenidos.

En general la lógica se aplica en el trabajo cotidiano, por ejemplo para ir de compras al supermercado se tiene que realizar cierto procedimiento lógico que permita realizar dicha tarea, si se desea pintar una pared también se requiere de la aplicación de la lógica.

La lógica es muy importante ya que incluso permite resolver problemas a los que nunca se ha enfrentado el ser humano, utilizando solamente la inteligencia y algunos conocimientos acumulados se pueden crear nuevos inventos, hacer innovaciones a los ya existentes o simplemente utilizar los mismos de tal manera que se obtengan mejores resultados. Al desarrollar la lógica matemática se ejercita el pensamiento abstracto, es posible generalizar la información usando el razonamiento tanto inductivo como deductivo y se pueden llevar a cabo cálculos matemáticos complejos.

Una parte importante de este capítulo es la demostración formal de teoremas, partiendo del hecho de que éstos son la representación de enunciados usando notación lógica. Es importante mencionar que en las demostraciones no hay un procedimiento único para llegar al resultado, éste puede ser más largo o más corto dependiendo de las reglas de inferencia, equivalencias lógicas y tautologías que se utilicen. De hecho puede haber tantas formas de acceder a la solución como personas diferentes tratando de obtenerla. Esto permite que el estudiante tenga confianza en la aplicación de reglas y fórmulas, de tal manera que cuando llegue a poner en práctica la lógica matemática para resolver un problema sea capaz de encontrar su propia solución.

4.2 Proposiciones

Una proposición o enunciado es una oración, frase o expresión matemática que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. La proposición es un elemento fundamental de la lógica matemática.

A continuación se presenta una lista de proposiciones válidas y no válidas, y se explica el porqué algunos enunciados no son proposiciones. Cada proposición se indica por medio de una letra minúscula, y luego de los dos puntos se expresa la proposición propiamente dicha.

Ejemplo 4.1. Proposiciones válidas y no válidas.

p: Estados Unidos es el país territorialmente más extenso del continente americano.
q: $-19 + 50 = 31$.
r: $x > (y - 13)7$.
s: Carlos Salinas de Gortari fue presidente de España.
t: Morelia será campeón en la presente temporada de fútbol.
u: ¿Cómo estás?
v: Formatea el disco antes de usarlo.

Las proposiciones **p**, **q** y **s**, tienen un valor de falso o verdadero, por lo tanto son proposiciones válidas. El inciso **r** también es una proposición válida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables x, y en determinado momento. La proposición **t** está perfectamente expresada, aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara la temporada de fútbol, de forma que antes, ahora o después la proposición pueda ser falsa o verdadera. Los enunciados **u** y **v** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero.

4.2.1 Proposiciones compuestas

Existen conectores u operadores lógicos que permiten formar proposiciones "compuestas". Se dice que una proposición es compuesta cuando está integrada por dos o más proposiciones simples conectadas por medio de operadores lógicos. A continuación se describen los operadores o conectores lógicos básicos.

Operador *and* (y)

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es $\wedge$.

Ejemplo 4.2. Considérese el siguiente enunciado: "El automóvil arranca si y sólo si el tanque tiene gasolina y la batería tiene corriente."

Sean:

p: El automóvil arranca.
q: El tanque tiene gasolina.
r: La batería tiene corriente.

De esta manera la representación del enunciado anterior, usando simbología lógica, es

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$$

y su tabla de verdad es la siguiente:

q	r	$p = q \wedge r$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Aquí se tiene que:

1 = verdadero
0 = falso

En la tabla anterior el valor de $\mathbf{q} = 1$ significa que el tanque tiene gasolina, $\mathbf{r} = 1$ significa que la batería tiene corriente y $\mathbf{p} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{r} = 1$ significa que el automóvil puede encender. Se puede notar que si **q** o **r** valen cero, esto implica que el automóvil no tiene gasolina o bien la batería no tiene corriente, y que por lo tanto no puede encender.

Al operador lógico $\wedge$ se le conoce como la multiplicación lógica, porque

$$1 \wedge 1 = 1$$
$$1 \wedge 0 = 0$$
$$0 \wedge 1 = 0$$
$$0 \wedge 0 = 0$$

En lógica matemática en lugar del signo = se utilizan los signos $\equiv$ y $\Leftrightarrow$ para indicar equivalencia lógica, de forma que la proposición del ejemplo anterior puede indicarse como $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$ o bien como $\mathbf{p} \Leftrightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$.

Operador *or* (o)

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se indica por medio de los siguientes símbolos: $\{\vee, +, \cup\}$.

Ejemplo 4.3. Se tiene el siguiente enunciado: "Una persona puede entrar al cine si y sólo si compra su boleto o le regalan un pase."

Sean:

p: Una persona entra al cine.
q: Compra su boleto.
r: Le regalan un pase.

De esta manera la representación del enunciado anterior con notación lógica es la siguiente

$$\mathbf{p} \equiv (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$$

y su tabla de verdad es

q	r	p ≡ (q ∨ r)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A partir de la tabla se ve que la única forma en la que no puede ingresar al cine ($\mathbf{p} \equiv 0$), es que no compre su boleto ($\mathbf{q} \equiv 0$) y que no le regalen un pase ($\mathbf{r} \equiv 0$).

Al operador lógico $\vee$ también se le conoce como la suma lógica, ya que

$$1 \vee 1 \equiv 1$$
$$1 \vee 0 \equiv 1$$
$$0 \vee 1 \equiv 1$$
$$0 \vee 0 \equiv 0$$

Se puede observar que $1 \vee 1 \equiv 1$ se sale de lo esperado ya que $1 + 1 = 2$, sin embargo cuando la suma aritmética es mayor que 1, en lógica matemática y álgebra booleana el resultado se considera 1. Lo único que significa esto es que para que una proposición formada por dos o más proposiciones que se están sumando sea verdadera, es suficiente con que uno de los sumandos sea verdadero. En el ejemplo anterior se considera que ($q \equiv 1$ cuando una persona compra su boleto y además $r \equiv 1$ si a esa misma persona alguien le regala un pase, por lo tanto dicha persona puede entrar al cine aunque le sobre un boleto).

Operador *not* (no)

El operador lógico not tiene como función negar la proposición. Esto significa que si a alguna proposición verdadera se le aplica el operador not, se obtendrá su complemento o negación. Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: {′, ¬, ¯, ~}.

La tabla de verdad relacionada con el operador not es la siguiente

p	**p′**
1	0
0	1

La negación o complemento de una función, es el valor contrario. Si $\mathbf{p} = 1$ su complemento en binario es $\mathbf{p}' = 0$.

Ejemplo 4.4. Sea **p**: "El automóvil es azul"; entonces su complemento es **p′**: "El automóvil no es azul".

Una doble negación de una proposición es equivalente a afirmar la proposición, esto es, $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}''$. Si una proposición tiene un número impar de negaciones es como si sólo tuviera una, por ejemplo $\mathbf{p}''' \equiv \mathbf{p}'$. Por otro lado un número par de negaciones equivale a una proposición verdadera $\mathbf{p}'''' \equiv \mathbf{p}$.

Operador *or* exclusivo (xor)

Además de los operadores básicos (and, or y not) existe el operador xor, cuyo funcionamiento es semejante al de or con la diferencia de que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, ya que cuando ambas son verdad el resultado es falso. Este operador se indica por medio del símbolo (⊕) y su tabla de verdad es la siguiente

p	**q**	**p ⊕ q**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Como se ve a partir de la tabla, se obtiene un resultado verdadero sólo cuando una de las proposiciones es verdadera, pero no si ambas lo son:

$$\mathbf{p} \oplus \mathbf{q} \equiv \mathbf{p}' \wedge \mathbf{q} \vee \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}'$$

Finalmente, con ayuda de estos operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos **Nand** (combinación de Not y And), **Nor** (combinación de Not y Or) y **Xnor** (combinación de Xor y Not), los cuales se tratarán con mayor detenimiento en el capítulo de álgebra booleana.

4.2.2 Proposición condicional (→)

Una proposición condicional es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuestas) **p** y **q**, y que se indica de la siguiente manera:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$$

Esto se lee "si **p** entonces **q**".

Ejemplo 4.5. Considérese que un candidato a la presidencia de México dice: "Si salgo electo presidente de la República, entonces el crecimiento anual del país será del 7%."

Una declaración como ésta se conoce como condicional, y para analizarla sean las proposiciones:

p: Salió electo Presidente de la República.
q: El crecimiento anual fue del 7%.

De esta forma el enunciado anterior se puede expresar como

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$$

y su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

En esta tabla hay que observar que el único caso en el que $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$ es 0 es cuando $\mathbf{p} \equiv 1$ y $\mathbf{q} \equiv 0$.

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

1) $\mathbf{p} \equiv 1$ significa que "el candidato salió electo", mientras que $\mathbf{q} \equiv 1$ significa que "el crecimiento anual del país fue de 7%", por lo tanto $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \equiv 1$ indica que el candidato dijo la verdad en su campaña.
2) $\mathbf{p} \equiv 1$ y $\mathbf{q} \equiv 0$ significa que el candidato mintió, ya que salió electo y el crecimiento anual no fue del 7% como lo prometió, por lo tanto la afirmación del candidato es falsa: $(1 \rightarrow 0) \equiv 0$.
3) $\mathbf{p} \equiv 0$ y $\mathbf{q} \equiv 1$ significa que aunque no salió electo hubo un crecimiento del 7% anual en el país, crecimiento que posiblemente fue ajeno al candidato presidencial y por lo tanto tampoco mintió, de tal forma que $(0 \rightarrow 1) \equiv 1$.
4) $\mathbf{p} \equiv 0$ y $\mathbf{q} \equiv 0$ significa que el candidato no salió electo y que tampoco el crecimiento anual del país fue del 7%, por lo tanto el candidato no mintió respecto a la afirmación que hizo en su campaña, por lo que $(0 \rightarrow 0) \equiv 1$.

4.2.3 Proposición bicondicional ($\leftrightarrow$)

Sean **p** y **q** dos proposiciones, entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente forma:

$$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$$

Esto se lee como "**p** si sólo si **q**" en donde la proposición que representa el enunciado ($\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$) es verdadera si **p** es verdadera si y sólo si **q** también lo es. O bien la proposición es verdadera si **p** es falsa y si sólo si **q** también lo es.

Ejemplo 4.6. Considérese el enunciado "Es buen estudiante, si y sólo si, tiene promedio de diez."

Para representar esto con notación lógica en forma de proposición bicondicional se definen las proposiciones

p: Es buen estudiante.
q: Tiene promedio de diez.

La tabla de verdad correspondiente es la siguiente:

p	**q**	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Como se ve en la tabla, la proposición bicondicional solamente es verdadera si tanto **p** como **q** son falsas o bien si ambas son verdaderas.

Usando los diferentes operadores lógicos expuestos, se pueden representar con notación lógica enunciados compuestos con más de una proposición.

Ejemplo 4.7. Representar con notación lógica los siguientes enunciados:

a) "Si no estudio matemáticas para computación y no hago la tarea de fundamentos de programación, entonces reprobaré el semestre o no podré ir de vacaciones a Cancún."

El enunciado anterior es una proposición condicional integrada por varias proposiciones simples, y para representarlo con notación lógica lo primero que se hace es determinar cuáles son las proposiciones simples que la integran para asignarles un nombre. En este caso se tienen las siguientes:

p: Estudio matemáticas para computación.
q: Hago la tarea de fundamentos de programación.
r: Reprobaré el semestre.
s: Podré ir de vacaciones a Cancún.

Usando esto y los operadores correspondientes, el enunciado se expresa como

$$(\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}') \rightarrow (\mathbf{r} \vee \mathbf{s}')$$

El enunciado anterior no marca explícitamente en dónde se deben de poner paréntesis, sin embargo se puede inferir que si hay más de una proposición antes de la palabra "entonces" o después de ella, éstas se deben de encerrar entre paréntesis para no tener problemas con la jerarquía de operación de los conectores lógicos.

b) "Si no pago el teléfono, entonces me cortarán el servicio telefónico. Y si pago el teléfono, entonces me quedaré sin dinero o pediré prestado. Y si me quedo sin dinero y pido prestado, entonces no podré pagar la tarjeta de crédito, si sólo si soy una persona desorganizada."

En este caso se tienen las siguientes proposiciones simples:

p: Pago el teléfono.
q: Me cortarán el servicio telefónico.
r: Me quedaré sin dinero.
s: Pediré prestado.
t: Pagar la tarjeta de crédito.
w: Soy una persona desorganizada.

Usando esto y los operadores, el enunciado dado se expresa como

$$(\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{q}) \wedge [\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{r} \vee \mathbf{s})] \wedge [(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{t}'] \leftrightarrow \mathbf{w}$$

Es conveniente encerrar entre paréntesis cada uno de los textos separados por punto, ya que cada uno de estos textos representa una hipótesis (varias hipótesis juntamente con su conclusión son parte de un teorema, como se verá posteriormente). Se puede observar en el enunciado dado que después de un punto y seguido aparece un conector lógico "Y". En general un punto y seguido significa un operador lógico "$\wedge$" sin necesidad de ponerlo explícitamente, por lo que en los siguientes ejercicios ya no se pondrá el operador lógico sino solamente el punto.

Es más complicado representar correctamente las proposiciones por medio de texto que por medio de notación lógica, ya que por lo general no se usan los paréntesis para agrupar información lo cual genera ambigüedad. Esto no sucede en matemáticas, ya que los paréntesis permiten la evaluación de la proposición respetando la jerarquía de operación de los diferentes operadores lógicos y la agrupación de la información cuando es necesario, ya sea para hacer más clara la proposición o bien para alterar el orden de evaluación. Sin embargo, nunca se debe abusar de los paréntesis ya que en lugar de hacer más clara la proposición la complican.

4.3 Tablas de verdad

Por medio de una tabla de verdad es posible mostrar los resultados obtenidos al aplicar cada uno de los operadores lógicos, así como el resultado de la proposición para todos y cada uno de los valores que pueden tener las diferentes proposiciones simples que integran una proposición compuesta. Con la tabla de verdad se puede observar con claridad el comportamiento particular y generalizado de una proposición y, con base en ello, determinar sus propiedades y características.

Una tabla de verdad está formada por filas y columnas, y el número de filas depende del número de proposiciones diferentes que conforman una proposición compuesta. Asimismo, el número de columnas depende del número de proposiciones que integran la proposición y del número de operadores lógicos contenidos en la misma.

En general se tiene la siguiente expresión:

$$\text{Número de filas} = 2^n$$

donde n es el número de proposiciones diferentes que integran una proposición compuesta.

Tablas de verdad

Las tablas de valores de verdad son una herramienta desarrollada por Charles Peirce en la década de 1880, siendo sin embargo más popular el formato que Ludwig Wittgenstein desarrolló en su *Tractatus logico-philosophicus*, publicado en 1918 por Bertrand Russell.

Se emplean en lógica para determinar los posibles valores de verdad de una expresión o proposición.

Ejemplo 4.8. Construir la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$[(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \vee (\mathbf{q}' \wedge \mathbf{r})] \leftrightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q})$$

En este caso se tiene que Número de filas = $2^3 = 8$ porque son tres las proposiciones diferentes (**p**, **q**, **r**) que integran la proposición. Aunque también está **q′** en la proposición compuesta anterior, se entiende que conociendo el valor de **q** es posible conocer el de **q′**, por lo tanto, se trata de la misma proposición.

Charles Sanders Peirce
(1839-1914)

Nació en Cambridge, Massachussets, Estados Unidos (10 de septiembre de 1839-19 de abril de 1914) y fue filósofo, lógico y científico. Es considerado el fundador del pragmatismo y el padre de la semiótica moderna.

Fue profesor de astronomía y matemáticas en Harvard, y aunque se graduó en química en la Universidad de Harvard, nunca logró tener una posición académica permanente a causa de su difícil personalidad (tal vez maniaco-depresiva) y del escándalo que rodeó a su segundo matrimonio después de divorciarse de su primera mujer, Melusina Fay. Desarrolló su carrera profesional como científico en la United Status Coast Survey (1859-1891), trabajando especialmente en astronomía, en geodesia y en medidas pendulares. Desde 1879 hasta 1884 fue profesor de lógica a tiempo parcial en la Universidad Johns Hopkins. Tras retirarse en 1888 se estableció con su segunda mujer, Juliette Froissy, en Milford, donde murió de cáncer después de 26 años de escritura intensa y prolífica.

Ludwig Josef Johann Wittgenstein
(1889-1951)

Es uno de los filósofos modernos fundamentales que en vida publicó solamente un libro: el *Tractatus logico-philosophicus*, que influyó en gran medida a los positivistas lógicos del Círculo de Viena, movimiento del que nunca se consideró parte. Tiempo después, el *Tractatus* fue severamente criticado por el propio Wittgenstein en *Los cuadernos azul y marrón* y en sus *Investigaciones filosóficas*, ambas obras póstumas. Fue discípulo de Bertrand Russell en el Trinity College de Cambridge, donde más tarde también él llegó a ser profesor.

De acuerdo con lo anterior la tabla es la siguiente:

p	q	r	q′	$p \to q$	$(q' \wedge r)$	$(p \to q) \vee (q' \wedge r)$	$r \to q$	$[(p \to q) \vee (q' \wedge r)] \leftrightarrow (r \to q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

En la tabla de verdad es conveniente colocar los valores de las proposiciones con cierto orden, ya que una tabla de verdad ordenada permite una revisión más rápida. Se debe de tener presente que aunque no se alteran los resultados si no se guarda un orden, al ordenar la tabla sí se cambia la colocación de los mismos. El orden recomendado es primero colocar las proposiciones ordenadas alfabéticamente y los valores de las mismas de menor a mayor (000, 001, 010, ..., 111), y luego las proposiciones complemento requeridas.

Por otro lado, al llevar a cabo la evaluación se debe de aplicar la siguiente jerarquía de operación:

Jerarquía	Operador
1ª.	( )
2ª.	′
3ª.	$\wedge$
4ª.	$\vee$
5ª.	$\to \leftrightarrow$

De acuerdo con esta tabla, lo primero que se evalúa en una proposición es lo que se encuentra entre paréntesis, después la negación, posteriormente la intersección y la unión, y finalmente la condicional y la bicondicional.

Cuando existe más de un paréntesis se evalúa primero el que se encuentra más adentro y de izquierda a derecha, es decir, si se encuentran dos paréntesis de forma que no está uno dentro de otro, se evalúa primero el que se encuentra más a la izquierda. Lo mismo ocurre con los operadores condicional y bicondicional, que aunque tienen la misma jerarquía de operación se evalúa primero el que se encuentre más a la izquierda.

Ejemplo 4.9. La tabla de verdad de la proposición $\mathbf{p' \rightarrow (r' \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee q' \rightarrow p}$ es la siguiente:

p	q	r	p'	q'	r'	$q \wedge p$	$(r' \vee q \wedge p)$	$(r \vee q')$	$p' \rightarrow (r' \vee q \wedge p)$	$p' \rightarrow (r' \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee q'$	F
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Aquí se tiene que

$$\mathbf{F = p' \rightarrow (r' \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee q' \rightarrow p}$$

Como se ve, primero se evalúa la información dentro del paréntesis, pero incluso dentro de él se debe de respetar la jerarquía de operación por lo que primero se evalúa la $\wedge$ y después la $\vee$, luego como existe otra unión se debe llevar a cabo esta operación. Posteriormente se aplica el operador $\rightarrow$ de la izquierda, ya que aunque su jerarquía es igual que la $\rightarrow$ de la derecha y la $\leftrightarrow$, su posición más a la izquierda le otorga prioridad. La evaluación continúa con la $\leftrightarrow$ y finalmente la $\rightarrow$ de la derecha.

4.3.1 Tautología, contradicción y contingencia

Tautología es aquella proposición (compuesta) que es cierta para todos los valores de verdad de sus variables. Un ejemplo típico es $(\mathbf{p' \vee p})$, ya que el resultado es verdadero para todos los valores que puede tener $\mathbf{p}$, como se muestra en la siguiente tabla de verdad:

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

Otro ejemplo es $(p \to q) \leftrightarrow (q' \to p')$, cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	q	p′	q′	$p \to q$	$q' \to p'$	$(p \to q) \leftrightarrow (q' \to p')$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Las tautologías son muy importantes en lógica matemática, ya que al tener un resultado verdadero para todos los valores de verdad, se consideran leyes que se pueden utilizar para realizar demostraciones de teoremas o para inferir resultados de proposiciones desconocidas. Existen varias tautologías conocidas y a continuación se listan las más comunes que, por supuesto, es posible verificar por medio de su tabla de verdad correspondiente:

Tabla 4.1 Tautologías comunes

1. **Adición:**

   a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

2. **Simplificación:**

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

3. **Absurdo:**

   a) $(p \to 0) \Rightarrow p'$

4. **Modus ponens:**

   a) $[p \wedge (p \to q)] \Rightarrow q$

5. **Modus tollens:**

   a) $[(p \to q) \wedge q'] \Rightarrow p'$

6. **Transitividad de la bicondicional:**

   a) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$

7. **Transitividad de la condicional:**

   a) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$

8. **Extensión de la condicional:**

   a) $(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$

   b) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$

   c) $(p \to q) \Rightarrow [(q \to r) \to (p \to r)]$

9. **Dilemas constructivos:**

   a) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$

   b) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge s)]$

Todas las tautologías de la lista anterior tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$$

esto es, si **P** entonces **Q**.

Cuando se tiene una proposición con letras mayúsculas, como en el caso anterior, se entiende que esa letra mayúscula equivale a una proposición compuesta y que como tal está formada por varias proposiciones más simples indicadas con letras minúsculas y conectadas por medio de operadores lógicos.

Para probar que las proposiciones anteriores son tautologías, se debe de cambiar el símbolo $\Rightarrow$ por $\rightarrow$ y evaluar la proposición en la forma normal. Por ejemplo, la tabla de verdad de $[(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{q}'] \Rightarrow \mathbf{p}'$ es:

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p}'$	$\mathbf{q}'$	$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$	$(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{q}'$	$[(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{q}'] \rightarrow \mathbf{p}'$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

4.3.2 Contradicción

Se dice que una proposición es una contradicción o "absurdo" si al evaluar esa proposición el resultado es falso, para todos los valores de verdad. La contradicción más conocida es $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}')$ como se muestra en la siguiente tabla de verdad.

$\mathbf{p}$	$\mathbf{p}'$	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$
0	1	0
1	0	0

Por ejemplo considérese

p: La puerta es verde.

Entonces la proposición $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$ equivale a decir que "La puerta es verde y la puerta no es verde". Por lo tanto, ocurre una contradicción.

La contradicción $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$ se usa con frecuencia en la demostración de teoremas, ya que si en ésta se obtiene que **p** es verdadera y $\mathbf{p}'$ también lo es, resulta que $\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}'$ es verdadera, pero como se sabe que esto es una contradicción entonces se puede concluir que el teorema es falso. Más adelante se verá con todo detalle la utilidad de la contradicción.

4.3.3 Contingencia

Una proposición compuesta cuyos valores, en sus diferentes líneas de la tabla de verdad, dan como resultado unos y ceros se llama contingencia, inconsistencia o falacia. Prácticamente cualquier proposición que se invente por lo general es una contingencia. Considérese el siguiente ejemplo:

p	q	p′	q′	q′ ∨ p	(q′ ∨ p) → p′	[(q′ ∨ p) → p′] ∧ q
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Tomando en cuenta el resultado final de esta tabla se dice que se trata de una contingencia.

4.4 Inferencia lógica

Inferencia lógica

En relación con la inferencia lógica se tienen la inferencia inductiva en la que el proceso lógico va de lo particular a lo general, la inferencia deductiva que se caracteriza por ir de lo general a lo particular y por tener asociados los modos de inferencia conocidos como **modus ponendo ponens** y **modus tollendo tollens**, y la inferencia transductiva que va de lo particular a lo particular o de lo general a lo general.

Los argumentos basados en tautologías representan métodos de razonamiento universalmente correctos. Su validez depende solamente de la forma de las proposiciones que intervienen y no de los valores de verdad de las variables que contienen. A esos argumentos y a la forma en que se relacionan entre sí se les llama **reglas de inferencia**, y éstas permiten relacionar dos o más proposiciones para obtener una tercera que es válida en una demostración.

Ejemplo 4.10. Considérese el siguiente argumento:

- Si es un gato, entonces come carne.
- Si come carne, entonces es felino.

∴ Si es un gato, entonces es felino.

Sean las proposiciones:

p: Es un gato.
q: Come carne.
r: Es felino.

Utilizando éstas, el argumento anterior se puede representar con notación lógica de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\ \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r} \\ \hline \therefore \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r} \end{array}$$

Obsérvese que en esta regla de inferencia se parte de que las proposiciones $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ y $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ son verdaderas, porque son hipótesis y parte del enunciado, para obtener con ellas y la inferencia lógica la proposición $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$ que también se considera válida. Con esto no se quiere decir que las tres proposiciones son tautologías y que sus resultados en una tabla de verdad son siempre verdaderos en todos sus casos, sino que dichas hipótesis y la proposición obtenida con la regla de inferencia deberán considerarse verdaderas, porque integrándolas forman un argumento válido y por supuesto verdadero (posteriormente se verá cuáles deben ser las características de los argumentos válidos).

Ejemplo 4.11. Considérese el siguiente argumento:

- Bajan los impuestos.
- Si bajan los impuestos, entonces el ingreso se eleva.

∴ El ingreso se eleva

Sean las proposiciones:

p: Bajan los impuestos.
q: El ingreso se eleva.

Utilizando éstas, el argumento anterior se puede representar con notación lógica de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \\ \hline \therefore \mathbf{q} \end{array}$$

En el ejemplo 4.10 se aplicó una regla de inferencia conocida como "silogismo hipotético", mientras que en el ejemplo 4.11 se utilizó la que se conoce como "Modus ponens". Las proposiciones a las que se les aplica una regla de inferencia pueden ser bastante complejas, sin embargo la proposición obtenida será válida siempre y cuando se respete la forma de la regla de inferencia.

Ejemplo 4.12. Considérese el siguiente argumento:

$$
\begin{array}{l}
((p \to s') \vee q) \to (q' \wedge s) \\
(q' \wedge s) \to (s' \vee p) \\
\hline
\therefore ((p \to s') \vee q) \to (s' \vee p)
\end{array}
$$

Obsérvese cómo en este caso se está aplicando el silogismo hipotético mostrado en el ejemplo 4.10. Aquí **p** es $((p \to s') \vee q)$, **q** es $(q' \wedge s)$ y **r** es $(s' \vee p)$.

En la tabla 4.2 se listan las principales reglas de inferencia que se pueden aplicar en una demostración.

Tabla 4.2 Reglas de inferencia

10. **Adición**

$$
\begin{array}{l}
p \\
\hline
\therefore p \vee q
\end{array}
$$

11. **Simplificación**

$$
\begin{array}{l}
p \wedge q \\
\hline
\therefore p
\end{array}
$$

12. **Silogismo disyuntivo**

$$
\begin{array}{l}
p \vee q \\
p' \\
\hline
\therefore q
\end{array}
$$

13. **Silogismo hipotético**

$$
\begin{array}{l}
p \to q \\
q \to r \\
\hline
\therefore p \to r
\end{array}
$$

14. **Conjunción**

$$
\begin{array}{l}
p \\
q \\
\hline
\therefore p \wedge q
\end{array}
$$

15. **Modus ponens**

$$
\begin{array}{l}
p \\
p \to q \\
\hline
\therefore q
\end{array}
$$

16. **Modus tollens**

$$
\begin{array}{l}
p \to q \\
q' \\
\hline
\therefore p'
\end{array}
$$

Las reglas de inferencia permiten la creación de nuevas proposiciones a partir de información conocida. Posiblemente la obtención de la nueva proposición no sea difícil, pero sí el determinar qué regla de inferencia se deberá usar para obtener una proposición que sea de utilidad.

4.5 Equivalencia lógica

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si coinciden sus resultados para los mismos valores de verdad, y se indican como $\mathbf{p \equiv q}$ o bien como $\mathbf{p \Leftrightarrow q}$.

Ejemplo 4.13. **Considérese la siguiente tabla.**

p	q	p'	q'	$p \to q$	$q \to p$	$q' \to p'$	$(p \to q') \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1

Equivalentes   Equivalentes

En esta tabla se puede observar que $\mathbf{p \to q}$ es lógicamente equivalente a su contra positiva $\mathbf{q' \to p'}$ ya que coinciden en todas sus líneas, por lo tanto, se dice que $\mathbf{(p \to q) \equiv (q' \to p')}$. También la intersección de una proposición condicional con su recíproca es lógicamente equivalente a la proposición bicondicional, de manera que $\mathbf{[(p \to q) \wedge (q \to p)] \equiv (p \leftrightarrow q)}$.

Existen varias proposiciones lógicamente equivalentes, que son de gran utilidad en la demostración de teoremas; en la tabla 4.3 se presenta una lista de éstas.

Tabla 4.3 **Proposiciones equivalentes**

17. Doble negación

a) $\mathbf{p'' \equiv p}$

18. Leyes conmutativas

a) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
b) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
c) $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

19. Leyes asociativas

a) $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$
b) $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$

20. Leyes distributivas

a) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
b) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

21. Leyes de idempotencia

a) $(p \vee p) \equiv p$
b) $(p \wedge p) \equiv p$

22. Leyes de Morgan

a) $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$
b) $(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$

23. Contrapositiva

a) $(p \rightarrow q) \equiv (q' \rightarrow p')$

24. Variantes de la condicional

a) $(p \rightarrow q) \equiv (p' \vee q)$
b) $(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge q')'$
c) $(p \vee q) \equiv (p' \rightarrow q)$
d) $(p \wedge q) \equiv (p \rightarrow q')'$
e) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \rightarrow r]$
f) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \wedge r)]$

25. Variantes de la bicondicional

a) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
b) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p' \vee q) \wedge (q' \vee p)]$
c) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')]$

26. Contradicción

a) $(p \wedge p') \equiv 0$

27. Ley de identidad

a) $(p \vee 0) \equiv p$
b) $(p \vee 1) \equiv 1$
c) $(p \wedge 0) \equiv 0$
d) $(p \vee p') \equiv 1$
e) $(p \wedge 1) \equiv p$
f) $(p \wedge q \vee q) \equiv q$

28. Disyunción exclusiva

a) $(p \oplus q) \equiv (p \leftrightarrow q)'$

Augustus De Morgan
(1806-1871)

Fue un matemático y lógico inglés nacido en la India. Fue profesor de matemáticas en el Colegio Universitario de Londres entre 1828 y 1866, y el primer presidente de la Sociedad de Matemáticas de Londres. De Morgan se interesó especialmente por el álgebra y escribió varias obras de lógica. En la moderna lógica matemática, llevan el nombre de De Morgan las siguientes leyes fundamentales del álgebra de la lógica: «la negación de la conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones»; «la negación de la disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones».

Su obra principal es *La lógica formal o el cálculo de inferencias necesarias y probables* (1847).

Es posible demostrar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes, no sólo por medio de una tabla de verdad como se hizo anteriormente, sino también con apoyo de las restantes equivalencias lógicas.

Ejemplo 4.14. Usando equivalencias lógicas demostrar que:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

Demostración:

$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$
$(p' \vee q) \wedge (q' \vee p) \equiv (p' \vee q) \wedge (q' \vee p)$ Usando equivalencias 25b y 24a
$(p' \vee q) \wedge (p \vee q') \equiv (p' \vee q) \wedge (p \vee q')$ Aplicando 18a

De aquí se nota claramente que se trata de una equivalencia lógica.

Debido a su utilidad en la demostración de teoremas, en la tabla 4.4 se presentan las principales tautologías, reglas de inferencia y equivalencias lógicas.

Tabla 4.4 Expresiones útiles para la demostración de teoremas*

Tautologías	Reglas de inferencia	Equivalencias lógicas
1. Adición a) $p \Rightarrow (p \vee q)$ **2. Simplificación** a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ **3. Absurdo** a) $(p \rightarrow 0) \Rightarrow p'$ **4. Modus ponens** a) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$ **5. Modus tollens** a) $[(p \rightarrow q) \wedge q'] \Rightarrow p'$ **6. Transitividad de la bicondicional** a) $[(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \leftrightarrow r)$ **7. Transitividad de la condicional** a) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$ **8. Extensión de la condicional** a) $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$ b) $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$ c) $(p \rightarrow q) \Rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ **9. Dilemas constructivos** a) $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee s)]$ b) $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)]$	**10. Adición** $\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$ **11. Simplificación** $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$ **12. Silogismo disyuntivo** $\begin{array}{l} p \vee q \\ p' \\ \hline \therefore q \end{array}$ **13. Silogismo hipotético** $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$ **14. Conjunción** $\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$ **15. Modus ponens** $\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$ **16. Modus tollens** $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q' \\ \hline \therefore p' \end{array}$	**17. Doble negación** a) $p'' \equiv p$ **18. Leyes conmutativas** a) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ b) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ c) $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$ **19. Leyes asociativas** a) $[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ b) $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ **20. Leyes distributivas** a) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ b) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ **21. Leyes de idempotencia** a) $(p \vee p) \equiv p$ b) $(p \wedge p) \equiv p$ **22. Leyes de De Morgan** a) $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$ b) $(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$ **23. Contrapositiva** a) $(p \rightarrow q) \equiv (q' \rightarrow p')$ **24. Variantes de la condicional** a) $(p \rightarrow q) \equiv (p' \vee q)$ b) $(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge q')'$ c) $(p \vee q) \equiv (p' \rightarrow q)$ d) $(p \wedge q) \equiv (p \rightarrow q')'$ e) $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \rightarrow r]$ f) $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \equiv [p \rightarrow (q \wedge r)]$ **25. Variantes de la bicondicional** a) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ b) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p' \vee q) \wedge (q' \vee p)]$ c) $(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \vee (p' \wedge q')]$ **26. Contradicción** a) $(p \wedge p') \equiv 0$ **27. Ley de identidad** a) $(p \vee 0) \equiv p$ b) $(p \vee 1) \equiv 1$ c) $(p \wedge 0) \equiv 0$ d) $(p \vee p') \equiv 1$ e) $(p \wedge 1) \equiv p$ f) $(p \wedge q \vee q) \equiv q$ **28. Disyunción exclusiva.** a) $(p \oplus q) \equiv (p \leftrightarrow q)'$

*De acuerdo con la información de esta tabla, en las demostraciones se cita el número y el inciso de cada regla utilizada, por ejemplo si de la regla 25 se aplica el inciso c se indicará 25c.

4.6 Argumentos válidos y no válidos

Un argumento consiste en una o más hipótesis y una conclusión, de forma que la conclusión se apoye en las hipótesis. También se puede considerar a un argumento como una serie de proposiciones interrelacionadas que conforman una proposición más compleja, a la cual se le llama *teorema*. Todos los argumentos necesitan de una o más proposiciones iniciales, y a estas proposiciones iniciales se les llama *hipótesis*. La conclusión de un argumento o teorema es una consecuencia de las hipótesis, por esa razón se requiere que las hipótesis sean convincentes y explícitas.

En general los argumentos lógicos a tratar tienen la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$$

La proposición **P** está integrada por proposiciones más simples llamadas *hipótesis*, las cuales se encuentran relacionadas por el operador lógico $\wedge$, y **Q** es la conclusión del teorema que también puede estar conformada por una o más proposiciones simples, de tal manera que el argumento puede tener la siguiente forma:

$$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{p_n}) \Rightarrow \mathbf{q}$$

en donde $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$,..., $\mathbf{p_n}$ son las hipótesis y $\mathbf{q}$ es la conclusión del razonamiento.

La validez del argumento depende de la estructura existente entre las hipótesis y la conclusión, ya sea por la forma de conectar las hipótesis con la conclusión o por la veracidad de la conclusión misma. La validez es una propiedad de los argumentos. Un argumento puede tener otras propiedades como claro, confuso, endeble, convincente, grande, pequeño, feo o bonito y sin embargo puede no ser válido.

Hay argumentos que son válidos, mientras que otros no lo son. A continuación se ilustra esto en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.15. Caso en el que el argumento es válido, y tanto las hipótesis como la conclusión son verdaderas.

Considérese lo siguiente:

"Las aves son ovíparas. El gorrión es ave. Por lo tanto; el gorrión es ovíparo."

Considerar que:

p_1: Las aves son ovíparas.
p_2: El gorrión es ave.
q: El gorrión es ovíparo.

Toda la información que se encuentra antes del término "Por lo tanto" conforma las hipótesis. Lo que separa a una hipótesis de otra es el punto y seguido, el cual se representa por una intersección entre cada una de las hipótesis. Por otro lado, la parte que está entre la palabra "Por lo tanto" y el punto final del enunciado, es lo que se conoce como *conclusión*. Dicha conclusión puede estar integrada también por más de una proposición. De esta forma el enunciado anterior se puede representar con notación lógica de la siguiente manera:

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$$

Como tanto hipótesis como conclusión son verdaderas ($p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $q = 1$), entonces se trata de un argumento válido ya que:

$$1 \wedge 1 \Rightarrow 1$$
$$1 \wedge 1 \rightarrow 1$$
$$1 \rightarrow 1$$
$$1$$

Ejemplo 4.16. En este caso se muestra que un argumento también es válido cuando todas o alguna de las hipótesis es falsa, y la conclusión es verdadera.

Considérese lo siguiente:

"Las mujeres son jóvenes. Miss universo es mujer.
En conclusión, miss universo es joven."

A partir de esto se definen:

p_1: Las mujeres son jóvenes.
p_2: Miss universo es mujer.
q: Miss universo es joven.

En el enunciado anterior la característica de joven es difícil de evaluar, ya que depende con quién se compare, pero suponiendo que una mujer es joven si tiene entre 17 y 30 años entonces se puede decir que $\mathbf{p_1}$ es "falsa", porque hay mujeres que no son jóvenes; $\mathbf{p_2}$ es "verdadera" y $\mathbf{q}$ es "verdadera". Aunque se tienen hipótesis falsas (con una que sea falsa es suficiente) y la conclusión verdadera, entonces el argumento es completamente válido. Considerando $\mathbf{p_1 = 0}$, $\mathbf{p_2 = 1}$ y $\mathbf{q = 0}$ se tiene:

$$\mathbf{0 \wedge 1 \Rightarrow 1}$$
$$\mathbf{0 \rightarrow 1}$$
$$\mathbf{1}$$

Hay que observar que para evaluar la validez de un argumento, se toma como base la proposición condicional.

Ejemplo 4.17. Caso en el que el argumento es válido, y las hipótesis y la conclusión son falsas.

Considérese lo siguiente:

"Los alemanes son de raza negra. George Bush es de raza negra. Por lo tanto; George Bush es alemán."

A partir de esto se definen:

$\mathbf{p_1}$: Los alemanes son de raza negra.
$\mathbf{p_2}$: George Bush es de raza negra.
$\mathbf{q}$: George Bush es alemán.

En este caso las hipótesis $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, y la conclusión $\mathbf{q}$ son falsas, sin embargo el argumento se considera válido.

Utilizando notación lógica, el argumento anterior se puede evaluar de la siguiente forma:

$$\mathbf{0 \wedge 0 \Rightarrow 0}$$
$$\mathbf{0 \rightarrow 0}$$
$$\mathbf{1}$$

Ejemplo 4.18. Un argumento no se considera válido, si está integrado por hipótesis verdaderas y conclusión falsa.

Considérese lo siguiente:

"$c^2 = a^2 + b^2 \cdot c^2 = a^2 + b^2$ se aplica a triángulos rectángulos. Por lo tanto; es la segunda ley de Newton".

Sean:

p_1: $c^2 = a^2 + b^2$.
p_2: $c^2 = a^2 + b^2$ se aplica a triángulos rectángulos.
q: Es la segunda ley de Newton.

En este caso **p_1** y **p_2** son "verdaderas" porque $c^2 = a^2 + b^2$ es aplicable a triángulos rectángulos, ya que se trata del teorema de Pitágoras. Sin embargo, al tener una conclusión falsa se dice que el argumento es inválido.

En términos de notación lógica y sustituyendo valores se tiene que:

$$\mathbf{p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q}$$
$$\mathbf{1 \wedge 1 \rightarrow 0}$$
$$\mathbf{1 \rightarrow 0}$$
$$\mathbf{0}$$

Cuando los argumentos se expresan en nuestro propio lenguaje se debe de tomar en cuenta el contexto, ya que se dan muchos supuestos, como sucede en el ejemplo 4.17 en donde una de las proposiciones es "George W. Bush es de raza negra" y se refiere al presidente de Estados Unidos que se supone que es conocido y que por lo mismo se sabe que no es de raza negra, sin embargo podría haber alguien que se llame igual y sí sea de color, de forma que algo que se considera falso resulta ser verdadero para algunos. Esto es parte de los riesgos que se corren cuando se trata la argumentación lógica.

Cuando no se sabe si las proposiciones que integran un argumento son falsas o verdaderas, es necesario probarlo en todos los casos posibles, teniendo en cuenta que un argumento no es válido solamente cuando a partir de hipótesis verdaderas se desprende una conclusión falsa, esto es, cuando $1 \rightarrow 0$.

Ejemplo 4.19. Considérese el siguiente argumento:

$$(\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}') \wedge (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}') \Rightarrow \mathbf{r}'$$

En este caso no se sabe si **p**, **q** o **r** son verdaderas o falsas ya que no representan una proposición conocida y a la cual se le pueda asignar un valor con exactitud, sin embargo resulta que este argumento es válido, ya que si se elabora la tabla de verdad, para todos los valores posibles que pueden tomar **p**, **q** y **r**, se encontrará que en todos los casos el argumento es verdadero; esto es, se trata de una tautología y por lo tanto es argumento válido.

Ejemplo 4.20. Considérese el siguiente argumento:

$$(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{r}') \wedge (\mathbf{q} \vee \mathbf{r}) \Rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}')$$

En este caso se trata de un argumento no válido, ya que cuando $\mathbf{p} = \mathbf{1}$, $\mathbf{q} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ se tiene que el argumento es falso.

La forma más fácil de determinar si un argumento es válido o no, cuando no se tienen los valores de las proposiciones, es por medio de la tabla de verdad. Si se trata de una tautología se dice que el argumento es válido, en caso contrario el argumento es inválido.

4.6.1 Tipos de argumentos

Básicamente existen dos tipos de argumentos lógicos: deductivos e inductivos.

- En un argumento deductivo se va de lo general a lo particular, se trata de un procedimiento que parte de un teorema que está formado por hipótesis y una conclusión. Se puede decir que se inicia con una explicación razonable para describir el comportamiento de un conjunto de datos, y que esa explicación se representa por medio de un teorema que deberá demostrarse formalmente por medio de leyes y reglas conocidas (tautologías, reglas de inferencia y equivalencias lógicas en el caso de lógica matemática). El argumento podrá ser válido o inválido. Un argumento deductivo válido se define como aquel que siendo sus hipótesis ciertas, la conclusión también lo es.

- En un argumento inductivo se va de lo particular a lo general, se puede decir que es el conjunto de observaciones y datos cuya tendencia permite visualizar o generalizar el comportamiento de un evento. La veracidad de sus conclusiones se va reforzando con la generación de más y más datos que apuntan en una misma dirección.

En la práctica existen formas de argumentación que no cumplen con los requisitos de los argumentos deductivos o inductivos, sin embargo en este libro solamente se tratará la demostración formal para argumentos deductivos e inductivos debido a que son considerados como los más rigurosos y confiables.

4.7 Demostración formal

Generalmente los argumentos lógicos son razonamientos resultantes del enunciado de un problema que es posible representar, usando notación lógica, como una proposición condicional integrada por varias proposiciones simples, siempre y cuando se identifiquen claramente las proposiciones simples y los conectores lógicos que unen dichas proposiciones. Como se planteó anteriormente, por lo general a la proposición condicional que resulta del planteamiento de un problema se le llama *argumento* o *teorema* y tiene la forma $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$, en donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son proposiciones compuestas. A las proposiciones que integran a $\mathbf{P}$ y que están conectadas por operadores $\wedge$ se les llama *hipótesis* y a la proposición $\mathbf{Q}$ se le llama *conclusión*.

Los teoremas representados con notación lógica, producto de un razonamiento, se pueden demostrar usando el "Método directo" o bien el "Método por contradicción" (que son métodos de demostración deductivos). Dependiendo de la naturaleza del teorema, algunas veces es más sencilla la demostración por el método directo y algunas veces es más fácil si se utiliza el método por contradicción.

4.7.1 Demostración por el método directo

Supóngase que $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ es el teorema resultante del planteamiento de un problema usando para ello notación lógica, y que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son proposiciones compuestas en las que interviene cualquier número de proposiciones simples que conforman una serie de hipótesis consideradas verdaderas. Se dice que $\mathbf{Q}$ se desprende lógicamente de $\mathbf{P}$, y que por lo tanto el teorema $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ es verdadero. Sin embargo también $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ puede ser falso, si se presenta alguna inconsistencia en la demostración o planteamiento inicial.

Si

$$\mathbf{P} \equiv (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{p}_n)$$

y

$$Q \equiv q$$

entonces el teorema por demostrar toma la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

en donde p_1, p_2, … , p_n son hipótesis que se consideran verdaderas, ya que son parte del planteamiento del problema, y q es la conclusión a la cual se debe llegar para demostrar la validez del teorema, usando para ello reglas de inferencia, tautologías, equivalencias lógicas y las propias hipótesis del problema. En la demostración se deben de colocar primero las hipótesis, seguidas de las proposiciones obtenidas al aplicar reglas de inferencia, tautologías y equivalencias lógicas, hasta llegar a la conclusión. Todas las líneas de la demostración se deben de numerar, con el fin de evitar confusiones en la obtención de nuevas proposiciones que se deben considerar verdaderas.

En general, las demostraciones formales deben de tener el siguiente formato:

$$\begin{array}{ll}
1.- & p_1 \\
2.- & p_2 \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
n.- & p_n \\
(n+1).- & p_{n+1} \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
(m-1).- & p_{m-1} \\
m.- & q
\end{array}$$

Las líneas 1 a n son las hipótesis resultantes del enunciado a demostrar, y siempre se colocan al principio de la demostración. Las líneas (n + 1) a (m – 1) son proposiciones obtenidas usando reglas de inferencia, tautologías o equivalencias lógicas, y finalmente la línea m es la conclusión q obtenida.

Se puede decir que la demostración de un teorema dependerá de la lógica empleada por cada persona para relacionar la información que ya conoce por medio de reglas de inferencia, tautologías o equivalencias lógicas hasta llegar a la conclusión, y que el camino no es único. Algunas personas demostrarán el teorema por un camino corto y otras llegarán a la solución por una ruta más larga, porque la vinculación lógica de información es diferente en cada caso. Realmente la demostración de un teorema es equivalente a resolver un problema de la vida real, y como en ésta cada persona puede tener un procedimiento diferente para llegar a los mismos resultados siendo algunos mejores que otros porque dependen del manejo lógico de la información, de las herramientas utilizadas y de la experiencia del propio sujeto.

No todas las personas logran resolver un problema determinado, sobre todo si nunca antes se han enfrentado a ese tipo de problema. Sucede lo mismo en lógica matemática: no todas las personas llegan a demostrar un teorema dado, ya que esto requiere de un razonamiento lógico para vincular la información. También es importante mencionar que no todos los problemas se pueden resolver de la misma manera, además de que no todos los teoremas son verdaderos, en cuyo caso es necesario demostrar que son falsos, lo cual se analizará más adelante.

Si está bien planteado el problema, el número de hipótesis (1 a la n) no cambia, sin embargo el número de proposiciones obtenidas entre (n + 1) y (m − 1) varía dependiendo de las reglas de inferencia, tautologías o equivalencias lógicas que cada persona utilice para llegar a la conclusión.

En el ejemplo 4.21 se demuestra un enunciado y se explica el uso de las herramientas lógicas.

Ejemplo 4.21. Sean las siguientes proposiciones:

p: Trabajo.

q: Ahorro.

r: Compraré una casa.

s: Podré guardar el coche en mi casa.

A partir de esta información represéntese el siguiente enunciado en forma de teorema usando notación lógica, y llévese a cabo la demostración formal aplicando el método directo.

"Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa. Por consiguiente, si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro."

En el enunciado anterior, cada párrafo separado por punto y seguido es una hipótesis hasta llegar a una frase como "Por consiguiente", "Por lo tanto" o "En conclusión", ya que después de esa frase toda la información formará parte de la conclusión.

Como el planteamiento se debe representar en la forma **P** $\Rightarrow$ **Q**, la información que pertenece a cada elemento es como se muestra a continuación.

P	$\Rightarrow$	Q
Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa. Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa.	**Por consiguiente**	**si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro**

Como se ve, **P** puede estar integrada por varias hipótesis, cada una de ellas separada por un punto y seguido, y para completar el teorema es necesaria su conclusión correspondiente **Q**.

P			$\Rightarrow$	Q
Si trabajo o ahorro, entonces compraré una casa	**.**	**Si compro una casa, entonces podré guardar el coche en mi casa**	**Por consiguiente**	**si no puedo guardar el coche en mi casa, entonces no ahorro**
$(p \vee q) \rightarrow r$	$\wedge$	$r \rightarrow s$	$\Rightarrow$	$s' \rightarrow q'$

En el cuadro anterior, **P** está integrada por dos hipótesis

$$(p \vee q) \rightarrow r$$
$$r \rightarrow s$$

Mientras que **Q** sólo es la proposición condicional

$$s' \rightarrow q'$$

Tomando en cuenta esto, el enunciado en forma de teorema es el siguiente:

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge [r \rightarrow s] \Rightarrow [s' \rightarrow q']$$

La forma general de este enunciado es:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$$

A continuación se demuestra el teorema, señalando en cada paso la tautología, regla de inferencia o equivalencia lógica que se usa en la demostración.

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	Hipótesis
2. $r \rightarrow s$	Hipótesis
3. $q \rightarrow (q \vee p)$	Adición; 1
4. $q \rightarrow (p \vee q)$	3; ley conmutativa; 18a
5. $q \rightarrow r$	4, 1; silogismo hipotético; 13
6. $q \rightarrow s$	5, 2; silogismo hipotético; 13
7. $s' \rightarrow q'$	6; contrapositiva; 23

Como se ve, lo primero que se coloca en la demostración son las hipótesis, ya que es información conocida del problema. La línea 3 es la tautología 1, $[p \Rightarrow (p \vee q)]$, que en este caso no se aplicó a ninguna línea sino que se extrajo directamente de la lista de tautologías, se cambió $\Rightarrow$ por $\rightarrow$ y se cambió la letra **p** por **q** y **q** por **p**, por conveniencia. Para obtener la línea 4, se aplicó a la información que se encuentra en la línea 3 la equivalencia lógica (18a). En la línea 5 se utilizó la información de las líneas 4 y 1 y se aplicó la regla de inferencia (13). En la línea 6 también se usó el silogismo hipotético, pero ahora fue aplicado a la información de las líneas 5 y 2. Finalmente se aplicó a la información de la línea 6 la equivalencia lógica (23) para obtener la conclusión.

Como se mencionó, el procedimiento para demostrar un teorema no es único sino que depende de cada persona. A continuación se presenta otra forma de demostrar el mismo teorema.

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	Hipótesis
2. $r \rightarrow s$	Hipótesis
3. $(p \vee q) \rightarrow s$	1, 2; Silogismo hipotético; 13
4. $s' \rightarrow (p \vee q)'$	3; Contrapositiva; 23
5. $s' \rightarrow (p' \wedge q')$	4; Ley de De Morgan; 22a
6. $(q' \wedge p') \rightarrow q'$	Simplificación; 2
7. $(p' \wedge q') \rightarrow q'$	6; Ley conmutativa; 18b
8. $s' \rightarrow q'$	5, 7; Silogismo hipotético; 13

Obsérvese cómo las equivalencias lógicas, como es el caso de la ley de De Morgan para obtener la línea 5, se pueden aplicar a toda la línea o parte de ella. Sin embargo, las reglas de inferencia requieren de una o más líneas completas con el formato de la regla, para poderse aplicar, como es el caso del silogismo hipotético para obtener la línea 3, que requiere de la información que se encuentra en las líneas 1 y 2.

Es probable que las tautologías causen un poco de confusión en relación con la forma en que se aplican en las demostraciones, ya que se puede tener parte de la tautología en una línea y colocar el resto en otra, como se muestra a continuación.

Supóngase que en una demostración se tienen las siguientes líneas:

5.	$(\mathbf{p} \to \mathbf{q}')$	....
6.	....	....
7.	$(\mathbf{p} \to \mathbf{q}') \vee \mathbf{s}$	5; Adición; 1

Realmente la tautología que se está aplicando a la línea 5 es la adición $\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$, porque teniendo $\mathbf{p}$, que en este caso $\mathbf{p} \equiv (\mathbf{p} \to \mathbf{q}')$, se puede obtener $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$, que en este caso $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \equiv [(\mathbf{p} \to \mathbf{q}') \vee \mathbf{s}]$.

La mayoría de estas reglas vienen en dos presentaciones, una como tautología y otra como regla de inferencia, de tal forma que en lugar de indicar que se aplicó la adición 1 en la línea 7, se pudo haber indicado que se aplicó la regla de inferencia 10, que también es una adición.

Las tautologías no necesariamente se tienen que aplicar a una línea, sino que se pueden extraer de la lista y colocarse en la demostración como se muestra a continuación:

5.	....	....
6.	$[[(\mathbf{r}' \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{p}'] \wedge (\mathbf{s}' \to \mathbf{q})] \Rightarrow [(\mathbf{r}' \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{p}']$	Simplificación; 2
7.	....	....

En este caso se extrajo la tautología $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \Rightarrow \mathbf{p}$ de la lista y se colocó en la demostración, por lo tanto no es necesario que se indique a qué línea se aplicó, sólo se requiere indicar qué tautología es y qué número tiene. Obsérvese cómo lo único que se debe guardar es la forma, ya que para aplicar la regla se consideró que $\mathbf{p} \equiv [(\mathbf{r}' \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{p}']$ y que $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{s}' \to \mathbf{q})$.

4.7.2 Demostración por contradicción

El procedimiento de la demostración por contradicción es semejante al del método directo, con la diferencia de que las líneas iniciales de dicha demostración no son únicamente las hipótesis, sino que además se incluye una línea con la negación de la conclusión. Se debe de tener presente que el objetivo de la demostración es llegar a una contradicción de la forma $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}') \equiv \mathbf{0}$.

Ejemplo 4.22. La demostración por contradicción del teorema

$$[(p \vee q) \to r] \wedge [r \to s] \Rightarrow [s' \to q']$$

es la siguiente:

1. $(p \vee q) \to r$	Hipótesis
2. $r \to s$	Hipótesis
3. $(s' \to q')'$	Negación de la conclusión
4. $[(s' \wedge q'')']'$	3; Variantes de la condicional 24b
5. $s' \wedge q$	4; Doble negación; 17
6. s'	5; Simplificación; 11
7. q	5; Simplificación; 11
8. $(p \vee q) \to s$	1, 2; Silogismo hipotético; 13
9. $s' \to (p \vee q)'$	8; Contrapositiva; 23
10. $s' \to (p' \wedge q')$	9; Ley de De Morgan; 22a
11. $(p' \wedge q')$	6, 10; Modus ponens; 15
12. q'	11; Simplificación; 11
13. $q \wedge q'$	7, 12; Conjunción; 14
14. 0	13; Contradicción; 26

El llegar a un valor de cero significa que el teorema es falso, pero como se consideró como verdadera la negación de la conclusión y se colocó en la demostración, realmente lo que se está demostrando es que el teorema $[(p \vee q) \to r] \wedge [r \to s] \Rightarrow [s' \to q']$ es verdadero.

En este caso el procedimiento por contradicción resultó más complejo, pero no siempre es así ya que existen teoremas que son más fáciles de demostrar por contradicción.

En la demostración por contradicción del ejemplo 4.22 no era necesario llegar a la contradicción con la proposición **q** como de hecho ocurrió, $q \wedge q'$, sino que se podría haber llegado a la contradicción de **p**, **r** o **s**. Cualquiera de ellas es válida para la demostración del teorema.

Ejemplo 4.23. Representar el siguiente enunciado en forma de teorema usando notación lógica, y hacer la demostración formal mediante el método directo y por contradicción.

"Si no le acelero al automóvil, entonces el automóvil no correrá. Si no le freno al automóvil, entonces el automóvil no se detendrá. Si el automóvil no corre o no se detiene, entonces el automóvil está fallando. De tal manera que si el automóvil no está fallando, entonces puedo acelerar y frenar el automóvil."

Sean las siguientes proposiciones:

p: Le acelero al automóvil.
q: El automóvil corre.
r: Le freno al automóvil.
s: El automóvil se detiene.
t: El automóvil falla.

A partir de estas proposiciones y del enunciado dado se obtienen las hipótesis y la conclusión siguientes:

$p' \to q'$	Hipótesis
$r' \to s'$	Hipótesis
$(q' \vee s') \to t$	Hipótesis
$t' \to (p \wedge r)$	Conclusión

Entonces el teorema por demostrar queda integrado de la siguiente forma:

$$[p' \to q'] \wedge [r' \to s'] \wedge [(q' \vee s') \Rightarrow [t' \to (p \wedge r)]]$$

Demostración del teorema mediante el método directo:

1. $p' \to q'$	Hipótesis
2. $r' \to s'$	Hipótesis
3. $(q' \vee s') \to t$	Hipótesis
4. $[p' \to q'] \wedge [r' \to s']$	1, 2; Conjunción; 14
5. $(p' \vee r') \to (q' \vee s')$	4; Dilema constructivo; 9a
6. $(p' \vee r') \to t$	5, 3; Silogismo hipotético; 13
7. $t' \to (p' \vee r')'$	6; Contrapositiva; 23
8. $t' \to (p \wedge r)$	7; Ley de De Morgan; 22a

Demostración del teorema por contradicción:

1.	$p' \to q'$	Hipótesis
2.	$r' \to s'$	Hipótesis
3.	$(q' \vee s') \to t$	Hipótesis
4.	$[t' \to (p \wedge r)]'$	Negación de la conclusión
5.	$[t \vee (p \wedge r)]'$	4; Variantes de la condicional; 24a
6.	$t' \wedge (p \wedge r)'$	5; Ley de Morgan; 22a
7.	t'	6; Simplificación; 11
8.	$(p \wedge r)'$	6; Simplificación; 11
9.	$[p' \to q'] \wedge [r' \to s']$	1, 2; Conjunción; 14
10.	$(p' \vee r') \to (q' \vee s')$	9; Dilema constructivo; 9a
11.	$(p \wedge r)' \to (q' \vee s')$	10; Ley de De Morgan; 22b
12.	$(p \wedge r)' \to t$	11, 3; Silogismo hipotético; 13
13.	t	8, 12; Modus ponens; 15
14.	$t' \wedge t$	7, 13; Conjunción; 14
15.	0	14; Contradicción; 26

Es recomendable que las proposiciones que integran la contradicción sean simples, como se muestra en la línea 14. Por lo general, una de ellas se obtiene al relacionar la negación de la conclusión con las demás proposiciones, y la otra resulta de la vinculación de las hipótesis resultantes del planteamiento.

Por último, hay que tener presente que no existe una forma única de hacer una demostración, ya que siempre y cuando no se violen las reglas, cada persona puede usar un procedimiento diferente.

4.8 Predicados y sus valores de verdad

La lógica de proposiciones es muy buena para inferir información cuando es posible determinar claramente si una proposición es falsa o verdadera, pero en la vida real prácticamente nada es totalmente falso o totalmente verdadero, ya que influyen muchos factores. El problema de la lógica de proposiciones es que no puede trabajar con proposiciones en donde una gran cantidad de elementos cumplen con ciertas características y otros no.

Sea la proposición:

p: La puerta es verde.

¿Qué pasa si la puerta es verde a medias, es decir, si tiene espacios sin pintar? A pesar de esto, en la lógica proposicional se tiene que especificar si **p** es falsa o verdadera.

La **lógica de predicados**, o lógica de conjuntos, se basa en que las proposiciones son conjuntos de elementos que tienen una propiedad o característica llamada "predicado", y en este contexto una proposición puede ser verdadera para un grupo de elementos de un conjunto, pero falsa para otro.

Con el fin de ilustrar los conceptos, considérese el siguiente ejemplo:

Sean:

U = {**x** | **x** es un habitante del continente africano}

p: "Hablan francés"

A partir de esto se tiene que

p(x): "**x** habla francés"

o bien

p(x): "Todos los africanos hablan francés"

∀**x p(x)**: "Todos los africanos hablan francés"

∃**x p(x)**: "Algún o algunos africanos hablan francés"

En la lógica de predicados se debe definir un conjunto universo, dominio o universo del discurso, que contiene a todos los elementos a los cuales se está sometiendo al predicado. En el ejemplo anterior el dominio es **U** y el predicado es **p**. Además se cuenta con los conceptos "Todos" y "Algunos", que permiten manejar más de un elemento de un conjunto y cuya representación en matemáticas es:

∀ = "Para todo o todos"

∃ = "Existe alguno, algunos o al menos un elemento"

Obviamente la proposición **p(x)** del ejemplo anterior es falsa, porque si bien es cierto que muchos africanos hablan francés, también hay buena parte de los africanos que no hablan ese idioma, como por ejemplo la mayoría de los sudafricanos.

Hay que observar también que

$$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)} \equiv \mathbf{p(x)}$$

De tal manera que si no se le antepone al predicado el cuantificador universal $\forall$, es como si lo tuviera.

Por otro lado, se tiene que

$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)}$: "Algún africano habla francés"

Es verdadera, ya que efectivamente algunos africanos tienen como idioma oficial el francés o hablan el idioma aunque no sea el oficial. Obsérvese que no se especifica cuántos de ellos hablan francés, sólo se plantea si la proposición es falsa o verdadera. Es obvio que $\exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)} \neq \mathbf{p(x)}$.

En general se acostumbra indicar junto con el predicado cuál es el dominio para esa proposición, de forma que los enunciados anteriores pueden plantearse de la siguiente manera:

$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{U}$

(Para todo **x**; tal que **p**, donde **x** es un elemento de **U**)

$\exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{U}$

(Existe algún elemento **x**; tal que **p**, donde **x** es elemento de **U**)

Como se puede observar, el concepto de conjunto es muy importante en lógica de predicados, por lo que es conveniente tener en cuenta la definición de conjunto, sus propiedades y algunos conjuntos que se utilizan con más frecuencia en matemáticas.

Es importante mencionar que los operadores lógicos $\{\vee, \wedge, ', \rightarrow, \leftrightarrow\}$ que se usan en lógica de proposiciones, son también válidos en lógica de predicados.

Ejemplo 4.24. Sean:

$\mathbf{U} = \{\mathbf{z} \mid \mathbf{z}$ es una persona$\}$

$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}$ es un artista$\}$

$\mathbf{B} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}$ es un político$\}$

$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{U}$ y $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{U}$

p: Son ricos

q: Son corruptos

r: Son ricos y corruptos

A partir de aquí se tiene que:

$\forall z\ p(z)$: Todas las personas son ricas
$\forall x\ p(x)$: Todos los artistas son ricos
$\forall y\ p(y)$: Todos los políticos son ricos
$\forall x\ q(x)$: Todos los artistas son corruptos
$\forall y\ q(y)$: Todos los políticos son corruptos

$\exists z\ q(z)$: Algunas personas son corruptas
$\exists x\ p(x)$: Algunos artistas son ricos
$\exists y\ p(y)$: Algunos políticos son ricos
$\exists x\ q(x)$: Algunos artistas son corruptos
$\exists y\ q(y)$: Algunos políticos son corruptos

$\forall z\ r(z)$: Todas las personas son ricas y corruptas
$\forall x\ r(x)$: Todos los artistas son ricos y corruptos
$\exists y\ r(y)$: Algunos políticos son ricos y corruptos

$\forall x\ \forall y\ r(x, y)$: Todos los artistas y todos los políticos son ricos y corruptos

$\exists x\ \exists y\ r(x, y)$: Algunos artistas y algunos políticos son ricos y corruptos

$\exists x\ \forall y\ r(x, y)$: Algunos artistas y todos los políticos son ricos y corruptos

Se puede observar que en este caso se tiene que:

$$\exists x\ \forall y\ r(x, y) \equiv \exists x\ p(x) \wedge \forall y\ q(y) \qquad x, y \in U$$

El complemento de un enunciado se indica de la siguiente manera:

$[\forall x\ p(x)]' \equiv \forall x\ p'(x)$: Ningún artista es rico

ya que el complemento de todos es "ninguno". Sin embargo, el complemento de algunos son los elementos que faltan para completar "todos":

$[\exists x\ p(x)]' \equiv \exists x\ p'(x)$: Algunos artistas no son ricos
$\forall x\ \exists y\ r'(x, y)$: Ningún artista es rico ni corrupto, y algunos políticos no son ricos ni corruptos

Entonces el enunciado:

"Todos los artistas son ricos. Algunos políticos son corruptos. En conclusión no todos los artistas y no todos los políticos son ricos y corruptos."

se puede representar como

$$[\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)] \Rightarrow [\exists x\, \exists y\, r'(x, y)] \qquad x \in A;\ y \in B$$

También puede expresarse sacando del corchete los cuantificadores $\forall$ y $\exists$:

$$\forall x\, \exists y\, [p(x) \wedge q(y)] \Rightarrow \exists x\, \exists y\, [r'(x, y)] \qquad x \in A;\ y \in B$$

o bien quitando el cuantificador universal $\forall$ y dejando solamente el existencial $\exists$:

$$\exists y\, [p(x) \wedge q(y)] \Rightarrow \exists x\, \exists y\, [r'(x, y)] \qquad x \in A;\ y \in B$$

Como por lo general no se usan corchetes, también queda perfectamente expresado de la siguiente forma:

$$p(x) \wedge \exists y\, q(y) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, r'(x, y) \qquad x \in A;\ y \in B$$

Finalmente el enunciado se evalúa de la misma manera que como se hace en lógica proposicional:

$p(x)$	Es "falsa" (0) ya que no todos los artistas son ricos.
$\exists y\, q(y)$	Es "verdadera" (1) ya que algunos políticos son corruptos.
$\exists x\, \exists y\, r'(x, y)$	Es "verdadera" (1) ya que algunos artistas y algunos políticos no son ricos ni corruptos.

En el momento de evaluar la proposición es posible cambiar $\Rightarrow$ por $\rightarrow$, de forma que el resultado del predicado $p(x) \wedge \exists y\, q(y) \Rightarrow r'(x, y)$ se obtiene sustituyendo valores:

$$(0 \wedge 1) \rightarrow 1 \qquad \text{Es "verdadera"}$$

Ejemplo 4.25. Sea el enunciado:

"Algunas elecciones son limpias y no es cierto que todas las elecciones sean dudosas o en algunas de ellas no se cuenta con información."

Considerar que:

U = {**x** | **x** es una elección}
p: Son limpias
q: Son dudosas
r: Se cuenta con la información
p(x): Todas las elecciones son limpias
q(x): Todas las elecciones son dudosas
r(x): De todas las elecciones se cuenta con la información

A partir de esto, el enunciado anterior se puede representar de la siguiente manera:

$$\exists x\ p(x) \wedge \forall x\ q'(x) \vee \exists x\ r'(x) \qquad x \in U$$

Si el valor de verdad de cada una de las proposiciones que integran el predicado es:

$\exists x\ p(x)$	Algunas elecciones son limpias (verdadero)
$\forall x\ q(x) \equiv q(x)$	Todas las elecciones son dudosas (falso)
$q'(x)$	No es cierto que todas las elecciones sean dudosas (verdadero)
$\forall x\ r(x) \equiv r(x)$	Se cuenta con la información de todas las elecciones (falso)
$\exists x\ r'(x)$	De algunas elecciones no se tiene información" (verdadero)

De esta forma el enunciado completo se evalúa como verdadero:

$$\exists x\ p(x) \wedge \forall x\ q'(x) \vee \exists x\ r'(x) \equiv 1 \wedge 0' \vee 1 \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$$

El orden en que se colocan los argumentos es importante, ya que al cambiar de posición los argumentos que se encuentran en el paréntesis, el significado no siempre es el mismo.

Ejemplo 4.26. Sean:

$\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}$ es un ladrón de Madrid$\}$
$\mathbf{B} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y}$ es una persona que ha sido asaltada en Madrid$\}$
$\mathbf{p}$: "Asaltaron a"

A partir de aquí se plantea que:

$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)}$: Todos los ladrones de Madrid asaltaron a todas las víctimas de asalto en Madrid

$\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(x, y)}$: Todos los ladrones de Madrid asaltaron a todas las víctimas de asalto en Madrid

$\forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(y, x)}$: Todas las víctimas de asalto en Madrid asaltaron a todos los ladrones de Madrid

$\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)}$: Todos los ladrones de Madrid asaltaron a algunas víctimas de asalto en Madrid

$\exists \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(y, x)}$: Algunas víctimas de asalto de Madrid asaltaron a todos los ladrones de Madrid

$\exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(y, x)}$: Algunas víctimas de asalto de Madrid asaltaron a algunos ladrones de Madrid

Obsérvese que es muy importante la posición de los parámetros dentro del paréntesis, ya que cuando los conjuntos **A** y **B** no tienen los mismos elementos se puede obtener que:

$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)} \equiv \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(x, y)}$	(sus parámetros no cambian de posición)
$\forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)} \neq \forall \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(y, x)}$	(sus parámetros sí cambian de posición)
$\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)} \equiv \exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(x, y)}$	(sus parámetros no cambian de posición)
$\exists \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)} \neq \exists \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(y, x)}$	(sus parámetros sí cambian de posición)
$\exists \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)} \equiv \forall \mathbf{y}\ \exists \mathbf{x}\ \mathbf{p(x, y)}$	(sus parámetros no cambian de posición.
$\forall \mathbf{x}\ \exists \mathbf{y}\ \mathbf{p(x, y)} \neq \exists \mathbf{y}\ \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(y, x)}$	(sus parámetros sí cambian de posición)

La posición de los parámetros permite saber el significado correcto de los enunciados y no el orden de los cuantificadores, ya que éstos indican solamente la cantidad de elementos del dominio, que se están sometiendo al predicado.

Ejemplo 4.27. Sean:

U = {x, y | x ∈ Z^+, y ∈ Z^+}
p: (x − 1) ≤ y

¿Cuál es el significado del predicado de cada uno de los siguientes incisos, así como su valor de verdad?

a) $\forall$**x** $\forall$**y [p(x, y)]** ≡ $\forall$**y** $\forall$**x [p(x, y)]** **x, y ∈ U**

El significado es: "Para todo entero positivo se cumple que (x − 1) ≤ y."

En este caso el predicado es "**falso**", ya que existen elementos en donde el predicado no es cierto. Por ejemplo, si x = 5 no se cumple cuando y < 4, si x = 6 no se cumple para y < 5.

b) $\forall$**y** $\exists$**x [p(x, y)]** **x, y ∈ U**

El significado es: "Para algún entero positivo se cumple que (x − 1) ≤ y; para todo entero positivo." Obsérvese cómo primero se enuncia el parámetro *x*, ya que está colocado primero en el paréntesis **p(x, y)**.

El predicado es "**verdadero**", ya que cuando x = 2 es verdad para todos los valores de *y* que puede tomar, lo mismo ocurre para x = 1. Sin embargo, x = 3 no se cumple si y = 1. Pero como es suficiente que se cumpla para un valor de x, entonces se dice que es cierta.

c) $\exists$**y** $\forall$**x [p(x, y)]** **x, y ∈ U**

Significa que: "Para todo entero positivo se cumple que (x − 1) ≤ y; para cuando menos un entero positivo."

Es "**verdadera**", ya que dado un valor entero positivo *x* cualquiera, siempre se encontrará cuando menos un valor de *y* que permita que la desigualdad (x − 1) ≤ y; se cumpla.

d) $\forall$**x** $\exists$**y [p(x, y)]** **x, y ∈ U**

Significa que: "Para todo entero positivo se cumple que (x − 1) ≤ y; para cuando menos un entero positivo."

Se tiene lo mismo que en el inciso (c), ya que $\forall$**x** $\exists$**y [p(x, y)]** ≡ $\exists$**y** $\forall$**x [p(x, y)]** ≡ $\exists$**y [p(x, y)]** considerando que el cuantificador universal $\forall$**x** se puede eliminar. Por lo tanto, es "**verdadera**".

e) $\exists x \, \forall y \, [p(x, y)]$ $\quad x, y \in U$

Igual que el inciso (b), ya que $\exists x \, \forall y \, [p(x, y)] \equiv \forall y \, \exists x \, [p(x, y)] \equiv \exists x \, [p(x, y)]$, lo cual es "**verdadero**" cuando x = 1, 2.

f) $\exists x \, \exists y \, [p(x, y)] \equiv \exists y \, \exists x \, [p(x, y)]$ $\quad x, y \in U$

Significa que: "Existe algún entero positivo que cumple con $(x - 1) \leq y$; para al menos algún entero positivo."

Es "**verdadero**".

Del ejemplo anterior se puede inferir que cuando se trata del mismo cuantificador y el conjunto del discurso es el mismo tanto para *x* como para *y*, no importa el orden en que sean colocados los cuantificadores, ya que el significado es el mismo siempre y cuando no cambien de posición los parámetros dentro del paréntesis.

$$\forall x \, p(x, y) \equiv \forall y \, p(x, y)$$
$$p(x, y) \equiv p(x, y)$$
$$\forall x \, \forall y \, p(x, y) \equiv \forall y \, \forall x \, p(x, y)$$
$$\exists x \, \exists y \, p(x, y) \equiv \exists y \, \exists x \, p(x, y)$$
$$\forall x \, \exists y \, p(x, y) \equiv \exists y \, \forall x \, p(x, y)$$

Sin embargo, se debe tener cuidado cuando se tienen cuantificadores universal y existencial en un mismo predicado, pero donde *x*, *y* no pertenecen al mismo conjunto del discurso, ya que el resultado no necesariamente se conserva.

El número de argumentos de un predicado debe ser constante de tal forma que **p(a, b)** es diferente de **p(a, b, c)**. Sin embargo **p(x)** es equivalente a **p(w)**, siempre y cuando x y w pertenezcan al mismo universo del discurso.

No siempre se tienen frases que contengan las palabras "todos" o "algunos", a veces existen enunciados con la palabra "ninguno", de forma que ninguno de los elementos del universo del discurso cumple con la condición.

Ejemplo 4.28. Sean:

U = {x | x es alumno de la materia de matemáticas para computación}

p: Aprobó el examen de matemáticas para computación

p(x): Todos los alumnos de matemáticas para computación aprobaron el examen

El enunciado "Ningún alumno aprobó el examen de matemáticas para computación", se puede representar como:

$$(\forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)})' \qquad \text{o bien} \qquad \forall \mathbf{x}\ \mathbf{p}'(\mathbf{x})$$

En los predicados pueden existir variables libres y variables ligadas. Las variables ligadas a un cuantificador se consideran locales a ese predicado, mientras que las que no tienen cuantificador se consideran libres. Por ejemplo, en el siguiente predicado:

$$\forall \mathbf{x}\ \mathbf{p(x)} \vee \exists \mathbf{z}[\mathbf{q(y)} \wedge \mathbf{r(z)} \wedge \mathbf{s(w)}]$$

son variables libres "w" y "y". Se consideran variables ligadas a "x" y "z".

4.9 Inducción matemática

Como se mencionó anteriormente, una proposición es una oración, frase, igualdad o desigualdad, que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez. La inducción matemática se utiliza cuando se desea probar si una expresión matemática (igualdad o desigualdad) es falsa o verdadera, sin necesidad de representarla con notación lógica. En computación es común desarrollar programas en donde se tiene un "valor inicial", para la primera iteración, un incremento o decremento que puede ser aplicado por medio de una expresión matemática llamada término "*n*-ésimo", que permite obtener los valores de una sumatoria en cada iteración y un "resultado" de la sumatoria, el cual también es posible representar en forma generalizada por medio de una expresión matemática. Esto implica que es posible representar algoritmos en forma matemática y probar si esos algoritmos son falsos o verdaderos, usando para ello inducción matemática. Para usar la inducción matemática en la demostración de algoritmos es necesario que éstos se representen como una sumatoria de la siguiente manera:

$$x_1 + x_2 + x_3 \ldots + t = r$$

Inicio Término *n*-ésimo Resultado

En la sumatoria anterior, el primer elemento x_1 es el valor obtenido en la primera iteración ($n = 1$) y se conoce como valor inicial. El término n-ésimo es una expresión matemática que permite encontrar cada uno de los elementos de la sumatoria y que deberá estar en función de n, ya que dependiendo del valor de n se determina si se trata del primero, segundo o n-ésimo elemento. Finalmente, el resultado r también es una expresión matemática en función de n que permite encontrar el resultado de sumar los n elementos de la sumatoria. La sumatoria anterior, incluyendo inicio, término n-ésimo y resultado, es la proposición $P(n)$.

El principio de inducción matemática establece que la proposición $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq k$ si se cumplen las siguientes condiciones:

a) $P(k)$ es verdadera cuando $k = 1$.
b) $P(k)$ es cierta cuando $k = n + 1$.

Al primer inciso se le conoce como "paso básico" y al segundo se le llama "paso inductivo".

El método consiste en sustituir $n = 1$ en el n-ésimo término de la sumatoria. Si el resultado obtenido es igual al primer término de la sumatoria, se dice que se cumple el paso básico. En caso de que se cumpla el paso básico, se procede a probar si la proposición también es verdadera cuando $k = n + 1$. Se sustituye $(n + 1)$ en lugar de n en el termino n-ésimo de la sumatoria, se agrega dicho término en los dos lados de la igualdad, para que no se altere, y se realizan algunas operaciones algebraicas hasta obtener una forma tal que sea fácil de sustituir $k = n + 1$. Si el resultado, que ahora está en función de k, tiene la misma forma que la igualdad en función de n, se dice que se cumple el paso inductivo y que, por lo tanto, la proposición $P(n)$ es válida o verdadera. En caso de que no se cumpla el paso básico o inductivo se considera que $P(n)$ es falsa.

Cuenta la historia que cuando el matemático alemán Carl Friedrich Gauss tenía diez años, su maestro necesitaba salir del salón de clase y para dejar entretenidos a los alumnos les pidió que llevaran a cabo la siguiente sumatoria:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 998 + 999 + 1\,000$$

Seguramente el maestro esperaba que los alumnos hicieran 1000 sumas para obtener el resultado, sin embargo se dice que cuando se disponía a salir del salón Gauss le dijo que ya tenía el resultado, lo cual le sorprendió por lo que le pidió que le explicara cómo lo había obtenido. Gauss respondió que si se suma el primero y el último elementos de la sumatoria (1 + 1000) el resultado es 1001, si se suman el segundo y el penúltimo (2 + 999) el resultado es 1001, si se suman el tercero y el antepenúltimo también el resultado es 1001, y si se sigue sumando así hasta llegar a sumar los que se encuentran en la parte media de la sumatoria (500 + 501)

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Fue un matemático, astrónomo y físico alemán de una deslumbrante genialidad, que realizó contribuciones fundamentales en la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

Considerado "el príncipe de las matemáticas" y "el matemático más grande desde la antigüedad", Gauss es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido a través de la historia.

el resultado también es 1001. Por lo tanto, como el número de parejas al sumar 1000 elementos es 500, el resultado de la sumatoria es 500(1001), como se ilustra a continuación:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 500 + 501 + \ldots + 998 + 999 + 1000 = 500(1001)$$

Ejemplo 4.29. Para demostrar la respuesta de Gauss se usa inducción matemática, por lo que su planteamiento se representa como una proposición en función de n:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Inicio Término n-ésimo Resultado

Se entiende que si está en función de n, la proposición $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}$ y no solamente para múltiplos de 10. Pero para efectos de su representación considérese que $n = 1000$ y por lo tanto $1001 = (n + 1)$, $500 = \frac{n}{2}$ y el término n-ésimo en este caso es n.

Paso básico. Para demostrar que $P(n)$ es verdadera cuando $k = n = 1$, se sustituye 1 en el término n-ésimo, que en este caso es n:

$$n = 1$$

Si al sustituir $n = 1$ en el término n-ésimo se obtiene como resultado el primer elemento de la sumatoria, se dice que el "paso básico" se cumple, como ocurre en este caso.

Paso inductivo. En el paso inductivo se debe probar que $P(n)$ es cierta cuando $k = n + 1$, sustituyendo $(n + 1)$ en todas las "enes" del término n-ésimo y sumándolas a ambos miembros de la igualdad, hasta llegar a una expresión semejante a la que está al lado derecho del signo igual (en este caso $\frac{n(n+1)}{2}$), pero en lugar de que esté en función de n deberá estar en función de k.

Primeramente se sustituye $(n + 1)$ en todas las "enes" del término n-ésimo y se suma a ambos miembros:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{Factorizando } (n+1)$$

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$= \frac{(\quad +1)}{2} \qquad \text{Sustituyendo } k = n + 1$$

Como se obtuvo $\frac{(\quad +1)}{2}$ que es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, se dice que se cumple el paso inductivo. Debido a que tanto el paso básico como el inductivo se cumplen, se afirma que $P(n)$ es verdadera para todo valor entero de n y que por lo tanto Gauss tenía razón para el caso particular de $n = 1000$.

Ejemplo 4.30. Considérese que se desea demostrar por inducción matemática la siguiente proposición $P(n)$:

$$2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Paso básico. Sea $k = n = 1$, entonces:

$$[3(1) - 1] = 2$$

Como al sustituir $n = 1$ en el término n-ésimo $(3n - 1)$ se obtiene como resultado el primer elemento de la sumatoria, se dice que el "paso básico" se cumple.

Paso inductivo. Sea $k = n + 1$. Sustituyendo $(n + 1)$ en todas las "enes" del término n-ésimo y sumándolo a ambos lados de la igualdad se tiene que:

$$2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) + [3(n+1) - 1] = \frac{n(3n+1)}{2} + [3(n+1) - 1]$$

$$= \frac{n(3n+1) + 2[3(n+1) - 1]}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + n + 2(3n+2)}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + n + 6n + 4}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+\ )}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(3(n+1)+1)}{2}$$

$$= \frac{k(3k+1)}{2} \qquad \text{Sustituyendo } k = n + 1$$

Por lo tanto, también se cumple el paso inductivo y se dice que $P(n)$ es verdadera.

4.10 Aplicación de la lógica matemática

La lógica matemática no es de reciente creación, no surgió con el uso de las computadoras, por el contrario se ha consolidado en nuestro tiempo porque es una herramienta fundamental para mejorar el software y hardware que conocemos.

La historia de la lógica tiene sus inicios en el siglo III a. C. con la "Teoría silogista" de Aristóteles, quien introdujo los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, así como reglas de inferencia conocidas como el silogismo hipotético:

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \to q} \\ \mathbf{q \to r} \\ \hline \therefore\ \mathbf{p \to r} \end{array}$$

Esta regla se aplica en matemáticas y programación, algunas veces sin saber que se trata del silogismo hipotético:

$$\begin{array}{l} \mathbf{X > Y} \\ \mathbf{Y > Z} \\ \hline \therefore\ \mathbf{X > Z} \end{array}$$

También se encuentra disfrazada en algunas líneas de código de la siguiente manera:

If X > Y and Y > Z then X > Z

Aunque en sus inicios se usó principalmente para elaborar demostraciones matemáticas, en su aplicación a la programación el procedimiento de la demostración equivale a desarrollar un algoritmo para resolver un problema, usando para ello las instrucciones válidas (asignación, ciclos, lectura, escritura, declaración, etc.) de un lenguaje formal. Tanto el procedimiento de demostración como el diseño de algoritmos, dependen exclusivamente de la lógica usada por la persona que los desarrolla. Los caminos en ambas situaciones pueden ser más o menos eficientes, pero lo interesante en ambos casos es que permiten usar la creatividad y reflexión de la persona para lograr el objetivo, ya que no existe una forma única de demostrar un teorema o desarrollar un algoritmo.

En tiempos remotos Crisipo de Sodi (281-206 a. C.) introdujo los operadores lógicos de la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la implicación ($\rightarrow$), la disyunción exclusiva ($\oplus$) y la complementación ($'$), así como los valores de "falso" o "verdadero". Con esos operadores lógicos, muchos siglos después Augustus De Morgan (1806-1871) enunció sus famosas leyes de De Morgan:

$$(\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vee \ldots \vee \mathbf{z})' \equiv (\mathbf{p}' \wedge \mathbf{q}' \wedge \ldots \wedge \mathbf{z}')$$
$$(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} \wedge \ldots \wedge \mathbf{z})' \equiv (\mathbf{p}' \vee \mathbf{q}' \vee \ldots \vee \mathbf{z}')$$

Que tienen aplicación no sólo en lógica matemática sino también en teoría de conjuntos. A partir de esta información George Boole (1815-1864) creó el álgebra booleana, la cual tiene amplias aplicaciones en la construcción de computadoras, robótica y automatización de sistemas eléctricos, mecánicos y electrónicos.

La lógica matemática también proporciona elementos para la creación de nuevos lenguajes de programación, al permitir estructurar sintáctica y semánticamente el lenguaje que se está desarrollando. En relación con esto, a continuación considérese la semejanza entre las composiciones de un lenguaje formal y las proposiciones lógicas que se vieron en el capítulo.

Sea

$$\Sigma = \{a, g, h, i, l, m, o, r\} \qquad \text{(Alfabeto)}$$

Cuyas composiciones son

$S \rightarrow hA$	$B \rightarrow rD$	$F \rightarrow gC$
$A \rightarrow oB$	$D \rightarrow mE$	$C \rightarrow a$
$B \rightarrow lC$	$E \rightarrow iF$	

Las composiciones permiten saber si una palabra es válida en un lenguaje, y este proceso de validación lo llevan a cabo los compiladores de un lenguaje de programación para determinar si las instrucciones de un programa están correctamente escritas. Actualmente mediante el uso de lenguajes formales y de la variedad de herramientas que proporciona la lógica matemática, se está trabajando en la simulación de lenguajes naturales que permitan una comunicación más amplia con la computadora.

Otra aplicación importante de la lógica matemática se encuentra en las bases de datos, en donde se consideran los archivos como relaciones que pueden manipularse por medio de operadores lógicos para obtener nuevos reportes de información, dando origen a lo que se conoce como "álgebra relacional" en la cual se basan todos los manejadores de bases de datos conocidos. Las redes de computadoras también utilizan el concepto de relación para representar la comunicación entre computadoras, de forma que es posible realizar operaciones lógicas entre matrices booleanas para obtener características necesarias en una red. Por todo lo anterior, se puede decir que la lógica matemática es esencial en la computación ya que permite sentar las bases para el entendimiento formal de prácticamente todas las áreas de ésta (bases de datos, programación, inteligencia artificial, lenguajes formales, sistemas digitales, redes, etcétera).

4.11 Resumen

La lógica es una disciplina que por medio de reglas y técnicas, determina si un razonamiento es válido. El elemento fundamental de la lógica es la proposición.

Una proposición es una oración, frase o expresión matemática que puede ser falsa o verdadera, pero no ambas a la vez.

Los siguientes son dos ejemplos de proposiciones:

p: Miguel de Cervantes Saavedra escribió la obra el *Quijote de la Mancha*.

q: $(y - 1) > (3x + 2)$

Los operadores lógicos básicos son *and* ($\wedge$), *or*($\vee$) y *not*($'$). Además de los operadores básicos, es posible usar las proposición condicional ($\rightarrow$) y bicondicional ($\leftrightarrow$) para representar enunciados más complejos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

"Si Compro una bicicleta o me levanto más temprano, entonces, no llegaré tarde a la escuela. Reprobaré el semestre si y sólo si llego tarde a la escuela. En conclusión; si llegué tarde a la escuela y reprobé el semestre, entonces no compré una bicicleta o no me levanté temprano."

Sean

p: Compré una bicicleta.

q: Me levanté más temprano.

r: Llegué tarde a la escuela.

s: Reprobé el semestre.

Por lo tanto, el enunciado anterior se puede representar con notación lógica de la siguiente manera:

$$[(p \vee q) \rightarrow r'] \wedge [s \leftrightarrow r] \Rightarrow [(r \wedge s) \rightarrow (p' \vee q')]$$

Es posible cambiar de tiempo las proposiciones para que tenga sentido, de tal manera que en lugar de decir compraré una bicicleta es posible decir compré una bicicleta o compro una bicicleta sin que esto afecte la representación del enunciado.

El enunciado anterior tiene formato de teorema, en donde las proposiciones $[(p \vee q) \rightarrow r']$ y $[s \leftrightarrow r]$ son las hipótesis y la proposición $[(r \wedge s) \rightarrow (p' \vee q')]$ es la conclusión. Lo que separa a las hipótesis de la conclusión es el símbolo $\Rightarrow$. Enunciados como éstos es posible demostrarlos por medio del método directo o el método por contradicción.

Se dice que una proposición es una tautología, si el resultado es verdadero para todos sus valores de verdad. Ejemplo:

p	p'	$p \vee p'$
0	1	1
1	0	1

Una proposición es una contradicción si el resultado es falso para todos los valores de verdad.

p	p'	$p \wedge p'$
0	1	0
1	0	0

Se dice que dos proposiciones son lógicamente equivalentes si sus resultados son iguales para todos sus valores de verdad.

p	q	p'	q'	$p \wedge q'$	$p' \wedge q$	$p \wedge q' \vee p' \wedge q$	$(p \leftrightarrow q)'$	$p \oplus q$
0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0

En la tabla anterior los resultados de las últimas tres columnas son iguales, por lo tanto se dice que son lógicamente equivalentes y se escribe:

$$p \wedge q' \vee p' \wedge q \equiv (p \leftrightarrow q)' \equiv p \oplus q$$

En una demostración formal una regla de inferencia permite encontrar proposiciones válidas a partir de otras que también se consideran válidas. Ejemplo: considerar que $[p' \rightarrow (q \vee r')]$ y $[(q \vee r') \rightarrow s]$ son válidas, aplicando la regla de inferencia conocida como "silogismo hipotético" se puede encontrar que $[p' \rightarrow s]$ también es válida.

Es posible demostrar que un teorema es válido con el apoyo de tautologías, equivalencias lógicas y reglas de inferencia.

Además de la lógica proposicional existe también la lógica de predicados o lógica de conjuntos que considera a las proposiciones lógicas como conjuntos de elementos, en donde no todos los elementos de un conjunto cumplen con las condiciones para decir que son verdaderos (o falsos) totalmente, de tal manera que se introducen los cuantificadores universal ($\forall$) y existencia ($\exists$) para la representación de enunciados. En la lógica de predicados se debe además indicar cuál es el dominio (**U**). Ejemplo.

Sea:

U = {x /x es un automóvil}

p: Son caros.

q: Son veloces.

r: Son lujosos.

"Si algunos automóviles son veloces y lujosos, entonces son caros. Algunos son lujosos y no son veloces. En conclusión si todo automóvil es caro, entonces es veloz o lujoso."

$$\exists x[[q(x) \wedge r(x)] \rightarrow p(x)] \wedge \exists x[r(x) \wedge q'(x)] \Rightarrow \forall x[p(x) \rightarrow [q(x) \vee r(x)]]$$

Los operadores lógicos de lógica de proposiciones son también válidos en lógica de predicados y la evaluación se realiza de la misma manera.

Los métodos directo y por contradicción usados en lógica de proposiciones y de predicados son métodos de demostración inductivos en donde se va de lo general a lo particular. Existen también métodos de demostración formal en donde se va de lo particular a lo general, demostrando que la proposición es verdadera para el primer elemento (n = 1) para n y para (n + 1) el cual recibe el nombre de inducción matemática.

4.12 Problemas

4.1. Representar en forma de teorema cada uno de los siguientes enunciados, usando para ello notación lógica:

a) "Si vivo en un lugar bajo, entonces se inunda la casa. Si vivo en un lugar alto, entonces me falta el agua o es zona cara. Por consiguiente, si no es zona cara y no se inunda la casa y me falta el agua, entonces vivo en la montaña."

b) "Está en la selección si y sólo si es buen jugador y tiene una edad menor de 27 años o pertenece al América. Si está en la selección y no es buen jugador o no pertenece al América, entonces es del Morelia. Por lo tanto, si es del Morelia, entonces es buen jugador."

c) "Si estudia informática o sistemas, entonces es alumno del Tecnológico. Es alumno del Tecnológico si y sólo si es buen estudiante. Por consiguiente, si no estudia sistemas o informática y no es alumno del Tecnológico, entonces no es buen estudiante."

d) "El programa corre, si y sólo si no tiene errores de compilación. Si no tiene errores de lógica y no tiene errores de compilación, entonces el programa está bien y los resultados son satisfactorios. Por lo tanto, si tiene errores de compilación o tiene errores de lógica, entonces el programa no corre y los resultados no son satisfactorios."

e) "Si se realiza un buen diseño de la base de datos y se hace una buena programación, entonces se accesará rápidamente la información. Si no se hace buena programación, entonces toma mucho tiempo corregir el programa. Por lo tanto, si no se accesa rápidamente la información y toma mucho tiempo corregir el programa, entonces no se ha realizado un buen diseño de la base de datos."

4.2. Representar en forma de teorema cada uno de los siguientes enunciados, usando para ello notación lógica:

a) "Haré la tarea de matemáticas para computación, si y sólo si tengo tiempo. Iré a la disco, si y sólo si tengo tiempo y tengo dinero. Si no tengo dinero, entonces haré la tarea de matemáticas para computación y veré un buen programa de televisión. Por lo tanto, si veo un buen programa de televisión y tengo tiempo, entonces haré la tarea de matemáticas para computación."

b) "Gana medalla en los juegos olímpicos, si y sólo si es buen deportista y tiene una edad menor a 27 años, o no lo descalifican los jueces. No es mexicano. De tal manera que, si no gana medalla y no es buen deportista, o lo descalifican los jueces, entonces es mexicano."

c) "Si estudia informática o estudia sistemas, entonces es alumno del Tecnológico. Es alumno del Tecnológico, si y sólo si es buen estudiante. Por consiguiente, si no estudia sistemas o informática y no es alumno del Tecnológico, entonces es un mal estudiante."

d) "Si tengo conocimientos de computación y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo. Si tengo problemas para encontrar trabajo, entonces tengo más de 40 años o no me preparé lo suficiente. Por lo tanto, si me preparo lo suficiente y no tengo más de 40 años y domino el inglés, entonces no tendré problemas para encontrar trabajo."

4.3. Elaborar la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $[(p \to q)' \to r] \to (p' \vee r' \wedge q)$

b) $p \to q' \vee r \leftrightarrow p \wedge q \to r'$

c) $(p \to r) \leftrightarrow [(q \vee r \wedge p') \to r']'$

d) $[(p \to q) \to r'] \wedge [(p' \vee r) \leftrightarrow q')]$

e) $p \to q \leftrightarrow r' \vee q' \to p' \wedge r$

f) $[[((p \wedge r) \leftrightarrow q') \to p'] \to r']'$

4.4. Elaborar la tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

a) $[((p \to q)' \to r) \vee p'] \to (r' \wedge q')$

b) $p \leftrightarrow q' \vee r \to p' \to q \wedge (p \vee q \to p')$

c) $[p \vee (r \to s')] \leftrightarrow [(p' \wedge s)' \to r']$

d) $[(p \to q') \to r] \to (p' \vee q \wedge r)'$

e) $p' \to (r' \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee q' \to p$

f) $[(p \to q') \to (q \vee r \wedge p')] \leftrightarrow [(q \to p)' \to r]$

4.5. Demostrar que las proposiciones de cada uno de los incisos siguientes son lógicamente equivalentes, usando para ello tautologías y/o las equivalencias lógicas restantes:

a) $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \equiv [(p \wedge q) \to r]$
b) $[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \wedge p) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r)]$

4.6. Demostrar que las proposiciones de cada uno de los incisos siguientes son lógicamente equivalentes, usando para ello tautologías y/o las equivalencias lógicas restantes:

a) $[(p \to q) \wedge (p \to r)] \equiv [p \to (q \wedge r)]$
b) $(p \to q) \equiv (p' \vee q)$
c) $[p \wedge (s \vee r')] \equiv [p \to (s \vee r')']'$
d) $[(p \vee s) \to (q \wedge p \vee s')] \equiv [(q \wedge p \vee s')' \to (p \vee s)']$

4.7. Demostrar por medio de una tabla de verdad que la regla 7a realmente es una tautología.

4.8. Demostrar por medio de una tabla de verdad que las reglas 4a, 6a, 8c y 9a realmente son tautologías.

4.9. Establecer si los siguientes enunciados son válidos o no. Explicar su respuesta:

a) $(q' \vee p') \wedge (r \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow r')$
b) $(r \to p') \wedge (q' \vee r') \Rightarrow (p' \to q)$
c) $(p' \to r) \wedge [(p' \to r) \to (q' \wedge p)] \Rightarrow (q' \wedge p)$

4.10. Establecer si los siguientes enunciados son válidos o no. Explicar su respuesta:

a) $[(p' \vee r) \to q] \wedge q' \Rightarrow (p' \vee r)'$
b) $(p \leftrightarrow q') \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p' \to r')$
c) $[(p' \wedge r) \to (q \to r')] \Rightarrow [[(q \to r') \to (p \vee q')] \to [(p' \wedge r) \to (p \vee q')]]$
d) $(p \to r') \wedge (p' \leftrightarrow q) \Rightarrow (q' \vee r)$
e) $(r \to q') \wedge [(p \wedge q') \to r'] \Rightarrow (q \to r)$

4.11. Representar el siguiente enunciado en forma de teorema y llevar a cabo su demostración usando el método directo y el método por contradicción:

"Si tengo mucho dinero o estoy muy carita, entonces las muchachas me quieren. Ninguna quiere salir conmigo. Si las muchachas me quieren, entonces todas quieren salir conmigo. Por lo tanto, no tengo mucho dinero."

4.12. Representar en forma de teorema el siguiente enunciado y llevar a cabo su demostración usando el método directo y el método por contradicción:

"Si estudio electrónica, entonces realizaré investigación en sistemas digitales. Si estudio informática, entonces manejaré la información de una empresa. Si realizo investigaciones en sistemas digitales o manejo la información de una empresa, entonces estaré feliz. Por lo tanto, si no estoy feliz, entonces no estudié electrónica y no estudié informática."

4.13. Representar en forma de teorema el siguiente enunciado y llevar a cabo su demostración usando el método directo y el método por contradicción:

"Si se ha realizado un buen diseño de la base de datos y se hace una buena programación, entonces se accesa rápidamente la información. Si no se hace buena programación, entonces toma mucho tiempo corregir el programa. Por lo tanto, si no se accesa rápidamente la información y toma poco tiempo corregir el programa, entonces no se ha realizado un buen diseño de la base de datos."

4.14. Demostrar por el método directo el teorema de cada uno de los siguientes incisos:

a) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \vee s) \rightarrow t] \wedge (p \vee s) \Rightarrow (r \vee t)$
b) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [q' \rightarrow s'] \Rightarrow [(r' \wedge s) \rightarrow p']$
c) $[(p' \wedge r) \rightarrow q] \wedge q' \wedge [r \rightarrow s] \Rightarrow [r \rightarrow (s \wedge p)]$
d) $[p' \rightarrow q'] \wedge (r \rightarrow s') \wedge [(q' \vee s') \rightarrow w] \Rightarrow [w' \rightarrow (p \wedge r')]$
e) $[p \leftrightarrow q'] \wedge [r \vee q'] \wedge p' \wedge [p' \rightarrow r] \Rightarrow [[r \rightarrow (r \vee q)] \wedge p]$

4.15. Demostrar por el método directo el teorema de cada uno de los siguientes incisos:

a) $[(r \vee q) \rightarrow q'] \wedge [p' \rightarrow r] \wedge (q \vee r) \wedge [q \rightarrow p] \Rightarrow$
$[q' \wedge [p' \rightarrow (q' \wedge r)]]$
b) $[q \rightarrow (p \wedge s)] \wedge [s' \rightarrow r] \Rightarrow [(s' \wedge p' \vee s') \rightarrow (r \wedge q')]$
c) $[(q \vee r') \rightarrow s] \wedge [t \rightarrow q'] \Rightarrow [(q \vee s') \rightarrow (t' \vee r)]$
d) $[q \wedge r] \wedge [p \rightarrow q'] \wedge [s \rightarrow (q \rightarrow r')]] \Rightarrow [s' \wedge (q \rightarrow p')]$
e) $[(q \vee s) \rightarrow t] \wedge t' \Rightarrow [(q' \wedge t') \wedge (q \rightarrow t)]$
f) $[p \leftrightarrow q'] \wedge [p' \rightarrow r] \Rightarrow [p' \rightarrow (q \vee r)]$
g) $[(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [r' \rightarrow p] \wedge [p \wedge r']' \Rightarrow [r \vee q]$

4.16. Demostrar por contradicción cada uno de los incisos del ejercicio 4.9.

4.17. Demostrar de dos maneras diferentes usando el método directo y por lo menos de una forma usando el método de contradicción, cada uno de los incisos siguientes:

a) $[(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}] \wedge [\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{s}] \Rightarrow [\mathbf{s}' \rightarrow \mathbf{q}']$

b) $[(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}] \wedge [\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{s}'] \Rightarrow [(\mathbf{r}' \wedge \mathbf{s}) \rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}')]$

c) $[\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})] \wedge [(\mathbf{q} \vee \mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{t}] \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \Rightarrow \mathbf{t}$

d) $[\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{r}] \wedge \mathbf{q}' \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}) \Rightarrow [[\mathbf{p}' \rightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q})] \wedge \mathbf{q}']$

e) $[\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{q}'] \wedge [\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{s}'] \wedge [(\mathbf{q}' \vee \mathbf{s}') \rightarrow \mathbf{t}] \Rightarrow [\mathbf{t}' \rightarrow (\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})]$

4.18. Demostrar usando inducción matemática que las proposiciones de cada uno de los siguientes incisos son verdaderas:

a) $3 + 6 + 20 + \ldots + [n\,(n!) + 2] = (n + 1)! + 2n - 1$

b) $0 + 3 + 8 + \ldots + (n^2 - 1) = \dfrac{n(2n+5)(n-1)}{6}$

c) $0 + 7 + 26 + \ldots + (n^3 - 1) = \dfrac{n[n(n+1)^2 - 4]}{6}$

d) $2 - 3 + 10 - 15 + \ldots + = [(\;\;1)^{n+1} n^2 + 1] = \dfrac{n[(\;\;1)^{n+1}(n+1) + 2]}{2}$

e) $a(a^{-1} + 1) + a(a^0 + 1) + a(a^1 + 1) + a(a^2 + 1) + \ldots + a(a^{n-1} + 1)$

$= \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \qquad n \in \mathrm{N}$

4.19. Demostrar usando inducción matemática que las proposiciones de cada uno de los siguientes incisos son verdaderas:

a) $5 + 15 + 25 + 35 + \ldots + (10n - 5) = 5n^2$

b) $\dfrac{3}{1 \cdot 3} + \dfrac{3}{3 \cdot 5} + \dfrac{3}{5 \cdot 7} + \dfrac{3}{7 \cdot 9} + \cdots + \dfrac{3}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{3n}{(2n+1)}$

c) $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{2} + \dfrac{a^4}{2} + \cdots + \dfrac{a^n}{2} = \dfrac{(a^{n+1} - 1)}{2(a-1)} \qquad a \in \mathrm{R};\ a \neq 0;\ a \neq 1$

d) $2^n \geq n^2 \qquad n \in \mathrm{Z}^+;\ n \geq 4$

e) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \qquad n \in \mathrm{N}$

f) $(2^{1-1}) + (2^{2-1}) + (2^{3-1}) + \cdots + (2^{n-1}) = 2^n - 1$

4.20. Representar el siguiente algoritmo en forma de sumatoria, encontrar la fórmula del n-ésimo término, la expresión matemática del resultado y usar inducción matemática para llevar a cabo la prueba de dicha proposición:

$x = 1$;
$s = 0$;
Mientras ($x \leq n$) hacer
  Inicio
    $e = 2^x + 1$;
    $s = s + e$;
    Imprimir (e);
    $x = x + 1$;
  Fin
  Imprimir (s).

4.21. Representar el siguiente algoritmo en forma de sumatoria, encontrar la fórmula del n-ésimo término, la expresión matemática del resultado y usar inducción matemática para llevar a cabo la prueba de dicha proposición:

$x = 1$;
$s = 0$;
Mientras ($x \leq n$) hacer
  Inicio
    $e = 3x - 1$;
    $s = s + e$;
    Imprimir (e);
    $x = x + 1$;
  Fin
  Imprimir (s);

4.22. Demostrar usando inducción matemática que el "sort de selección con intercambio" (selection with exchange) lleva a cabo $\frac{n^2 - n}{2}$ comparaciones para ordenar información en el peor de los casos.

4.23. Demostrar usando inducción matemática que el "sort de la burbuja" (bubble sort) lleva a cabo $\frac{n^2 - n}{2}$ comparaciones para ordenar información en el peor de los casos.

4.24. Demostrar por medio de inducción matemática que un árbol tiene $(n - 1)$ aristas. Aquí n es el número de nodos.

4.25. Sea $U = \{x \mid x \text{ es un animal}\}$. Encontrar los elementos necesarios para llevar a cabo la representación de cada una de las frases, usando notación lógica. Decir si el enunciado es falso o verdadero.

a) "Todos los animales tienen alas"
b) "Algunos animales vuelan"
c) "Algunos animales tienen alas y vuelan"
d) "Algunos animales tienen alas y no vuelan"
e) "Si es ave, entonces tiene alas"
f) "Si es ave, pone huevos y cacaraquea, entonces es gallina"
g) "Algunas gallinas no ponen huevos"
h) "Si es ave entonces no es mamífero"

4.26. Sea $U = \{x \mid x \text{ es un animal}\}$. Encontrar los elementos necesarios para llevar a cabo la representación de cada una de las frases, usando notación lógica. Decir si el enunciado es falso o verdadero.

a) "Todos los gatos son carnívoros"
b) "Si es carnívoro y no es perro, entonces es un gato"
c) "Es carnívoro si y sólo si es perro o gato"
d) "Ningún gato canta"
e) "Si canta entonces no es perro ni gato"
f) "Es carnívoro. No canta. No es perro ni gato, en conclusión es un león"

4.27. Decir con palabras el significado de cada uno de los siguientes enunciados, así como indicar cuál es el valor de verdad para cada uno de los incisos. Sea $U = \{x, y \mid x, y \in \mathrm{R}\}$; p: "$x^2 - 1 = y$".

a) $\forall x \exists y\, \mathrm{p}(x, y)$
b) $\exists x \forall y\, \mathrm{p}(x, y)$
c) $\forall y \exists x\, \mathrm{p}(x, y)$
d) $\forall x \forall y\, \mathrm{p}(x, y)$
e) $\exists x \exists y\, \mathrm{p}(x, y)$

4.28. Decir con palabras el significado de cada uno de los enunciados, así como indicar cuál es el valor de verdad para cada uno de los incisos.

Sea $U = \{x, y \mid x, y \in R\}$; p: "$x - y = 1$".

a) $\exists y \forall x\, p(x, y)$
b) $\forall x \exists y\, p(x, y)$
c) $\exists x \forall y\, p(x, y)$
d) $\forall y \exists x\, p(x, y)$
e) $\forall x \forall y\, p(x, y)$
f) $\exists x \exists y\, p(x, y)$

4.29. Representar con notación lógica los enunciados de cada uno de los siguientes incisos.

Sea $U = \{x, y \mid x, y \in R\}$; p: "$y = 2x - 1$"; q: "$x \geq y$"; r: "$y = \frac{1}{x}$":

a) Si existen algunas "y" que para toda "x" tal que si "$y = 2x - 1$" y "$x \geq y$" entonces "$y = \frac{1}{x}$"
b) Si para toda "y" existe alguna "x" tal que si "$y \neq 2x - 1$" o "$y = \frac{1}{x}$"; entonces "$x < y$"
c) Si para alguna "x", existe alguna "y" tal que "$y = \frac{1}{x}$" o para toda "x" "$x \geq y$" y existe alguna "y" tal que "$y \neq 2x - 1$"

4.30. Representar con notación lógica los enunciados de cada uno de los siguientes incisos.

Sea $U = \{x, y \mid x, y \in R\}$; p$(x, y)$: "$x \leq y$"; q: "$x - y = 1$"; r: "$x^2 + y^2 = 1$":

a) Existen algunas "x" que para toda "y" tal que "$x^2 + y^2 = 1$" y "$x > y$" o "$x - y = 1$"
b) Si para toda "x" existe alguna "y" tal que si "$x \leq y$"; entonces para alguna "y" existe alguna "x" tal que "$x - y \neq 1$" o "$x^2 + y^2 = 1$"
c) Si para toda "x" y para toda "y" tal que "$x > y$" y si para alguna "$x \leq y$", entonces "$x^2 + y^2 = 1$"