Conjuntos

Matemáticas Discretas

25/08/2013

Instituto Tecnológico de Nuevo Laredo
I.S.C. José Antonio Espino Lopez, M.A.N.

Contenido

Se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestra mente.

Georg Cantor.

Introducción

Georg Cantor definió ***el concepto de conjunto como una colección de objetos reales o abstractos e introdujo el conjunto potencia y las operaciones entre conjuntos***. En 1872 trató de publicar sus resultados en los que afirmaba que así como cambia la cardinalidad de los conjuntos finitos, ya sea porque se disminuye o incrementa el número de elementos de dichos conjuntos, de la misma forma también cambia la cardinalidad de los conjuntos infinitos de manera que para cada conjunto infinito conocido existe otro también infinito con una cardinalidad mayor.

Ahora se acepta el concepto de conjunto infinito y por lo tanto el de la cardinalidad infinita, pero en el siglo XIX muchos matemáticos de la época lo consideraron absurdo e incluso Kronecker (contemporáneo y compañero de Cantor) afirmó que Cantor pretendía enloquecer a las matemáticas con esas afirmaciones absurdas y se opuso a que fueran publicados los resultados en donde explicaba la noción de conjunto infinito. Esto trajo como consecuencia que se mirara con desconfianza la teoría de conjuntos, aunque posteriormente fueron publicados y aceptados los estudios de Cantor y así quedó restaurada la imagen negativa que los matemáticos de esa época le habían creado a esta teoría.

A pesar de las críticas iniciales que recibió, la teoría de conjuntos es la base de varias ramas de las matemáticas, entre las que destacan la probabilidad y la lógica matemática. En probabilidad permite ilustrar conceptos abstractos que sería imposible explicar sin el apoyo de conjuntos, y en lógica matemática la teoría de conjuntos proporciona las herramientas necesarias como axiomas, postulados, leyes y reglas de inferencia para probar relaciones y teoremas complejos por medio del método deductivo. Pero aún más, la teoría de conjuntos es la base de las ciencias de la computación ya que sirve de fundamento del álgebra booleana, de los lenguajes, de los autómatas, de las relaciones, de las bases de datos, de los grafos, de las redes y de los árboles, entre otros temas.

2.1 Características de los conjuntos.

Concepto de conjunto

Un ***conjunto*** es una colección bien ***definida*** de objetos llamados elementos o miembros del conjunto.

La palabra ***conjunto*** generalmente la asociamos con la idea de agrupar objetos, por ejemplo un conjunto de discos, de libros, de plantas de cultivo y en otras ocasiones en palabras como hato, rebaño, piara, parcelas, campesinado, familia, etc., es decir la palabra *conjunto* denota una colección de elementos claramente entre sí, que guardan alguna característica en común. Ya sean números, personas, figuras, ideas y conceptos.

En esta definición la frase bien ***definida*** es esencial para determinar si un grupo de personas o una colección de objetos es o no un conjunto, ya que para que una colección de objetos se considere como un conjunto no debe haber ambigüedad ni subjetividad.

Ejemplo. Considérense los siguientes enunciados:

- **a)** La colección de pizarrones azules.
- **b)** El grupo de alemanes entre 20 y 30 años.
- **e)** El grupo de los *mejores maestros* de la especialidad de sistemas computacionales.
- **d)** El grupo de alumnas más guapas de informática.

Los incisos **a** y **b** se pueden tomar como conjuntos, ya que están bien definidos puesto que por un lado el color azul es universal para todos y por tanto es fácil determinar si un pizarrón pertenece o no al conjunto, y por el otro también es sencillo ubicar a una persona en el conjunto de alemanes entre 20 y 30 años, conociendo obviamente su nacionalidad y edad.

En el inciso **e** la frase "*mejores maestros*" no permite establecer si un determinado maestro pertenece o no al conjunto de los mejores maestros de la especialidad de sistemas computacionales, ya que el término "mejor maestro" es subjetivo. Por lo tanto, el enunciado del inciso e no se puede considerar como conjunto.

Con el inciso **d** ocurre lo mismo, ya que la frase "*alumnas más guapas*" es ambigua puesto que existen distintos gustos para catalogar a una chica como guapa o no.

Los conjuntos se indican por medio de una letra mayúscula y los elementos de un conjunto por medio de letras minúsculas, números o combinación de ambos. Los elementos se colocan entre llaves (**{ }**) separados por comas (**,**).

Ejemplo. El conjunto B tiene como elementos a las letras de la palabra "mandarina" y éste se representa como:

B = {m, a, n, d, a, r, i, n, a}
= {m, a, n, d, r, i}
= {n, r, a, i, m, d}

Como se ve, en un conjunto se pueden eliminar los elementos repetidos además de que el orden en que se listen dichos elementos no es importante.

Miembro o membresía

Se dice que un elemento **x** pertenece a un conjunto **C** si se verifica que el elemento se encuentra dentro del conjunto, y para expresar la pertenencia se tiene la siguiente notación:

$x \in C$ Significa que **x** es elemento del conjunto **C**.
$x \notin C$ Significa que **x** no es elemento del conjunto **C**.

Ejemplo. Sea el conjunto

A= {1, 3, 5, 7, 9}

Por lo tanto se tiene que 3 ∈ A pero 6 ∉ A.

Notación abstracta

Algunas veces es imposible o inconveniente listar los elementos de un conjunto entre llaves, entonces en lugar de esto se utiliza lo que se conoce como notación abstracta:

A= {x | P(x)}

que se lee como A es el conjunto de las x, tal que cumple con la condición (o condiciones) P(x).

Ejemplo. Sea el conjunto B que tiene corno elementos a todas las palabras del idioma español que comienzan con la letra "e". En este caso no es imposible hacer el listado de todos los elementos del conjunto, sin embargo sí es inconveniente ya que el número de elementos es considerable.

En lugar del listado, el conjunto se puede expresar de la siguiente manera:

B = {x | x es una palabra del idioma español que comienza con "e"}

Por otro lado, sea el conjunto C que tiene corno elementos a todos los números reales comprendidos entre 2 y 3. En este caso es imposible listar los elementos del conjunto ya que hay una cantidad infinita de ellos; en lugar de esto el conjunto se puede indicar de la siguiente manera:

C = {x | x es un número real entre 2 y 3}

Universo o conjunto universal

El conjunto que contiene a todos los elementos a los que se hace referencia recibe el nombre de ***conjunto Universal***, este conjunto depende del problema que se estudia, se denota con la **letra U** y algunas veces con la **letra S** (espacio muestral).

Por ejemplo si solo queremos referirnos a los 5 primeros números naturales el conjunto queda:

U= {1, 2, 3, 4, 5}

Números naturales, enteros, racionales, reales e imaginarios

Forma alternativa para indicar conjuntos de gran importancia:

Conjunto de números naturales (enteros mayores que cero) representados por la letra N donde

N = { 1, 2, 3, ... }

Conjunto de números enteros positivos y negativos representados por la letra Z donde

Z = {..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

Conjunto de números racionales (números que se representan como el cociente de dos números enteros {fracciones}. Estos números se representan por una Q

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z};\ b \neq 0 \}$$

Conjunto de números irracionales (números que no puedan representarse como el cociente de dos números enteros) representados por la letra I.

Conjunto de los números reales que son los números racionales e irracionales es decir todos, representados por R.

Ø = Conjunto vacío

Subconjuntos

Si todos los elementos de A también son elementos de B, se dice que A es subconjunto de B o que A está contenido en B, y esto se denota como

$$A \subseteq B$$

Si A no es subconjunto de B se escribe:

$$A \not\subset B$$

Por otro lado, se dice que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, es decir, si se cumple que

$$A \subseteq B \quad \text{y} \quad B \subseteq A$$

Sean

$$A = \{\text{Rojo, Amarillo, Azul}\}$$
$$B = \{\text{Azul, Rojo, Amarillo}\}$$

Entonces

$$A = B$$

Ejemplo. Considérense los siguientes conjuntos:

$A = \{x \mid x \;\; Z;\ 10 \leq x \leq 100\}$
$B = \{2, 3, 5, 11, 12, 15,21, 30,45, 82\}$
$C = \{14, 15, 45\}$

Entonces se tiene que:

$C \subseteq B \quad A \not\subset B$
$C \subseteq A \quad A \not\subset C$
$B \not\subset A \quad B \not\subset C$

Aplicando la definición de subconjunto se obtiene que

1) Todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo:

$$A \subseteq A$$

2) El conjunto vacío (∅) es subconjunto de todos los conjuntos y en particular de él mismo:

$$\emptyset \subseteq A$$
$$\emptyset \subseteq U$$
$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

3) Todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto universo (U):

$$A \subseteq U$$
$$\emptyset \subseteq U$$
$$A \subseteq U$$

Conjunto Potencia

Por otro lado, si A es un conjunto entonces al conjunto de todos los subconjuntos de A se le llama conjunto potencia de A y se indica como P(A).

Ejemplo. Sea el conjunto

A= {a, b, c}

Entonces el conjunto potencia de A es:

P(A) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

El número de subconjuntos del conjunto A está dado por

$$|P(A)| = 2^n$$

donde **n** es el número de elementos del conjunto A

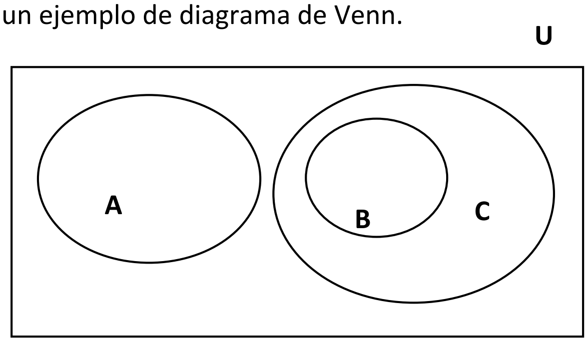
En el caso del ejemplo anterior se tiene que

$$|P(A)| = 2^3 = 8$$

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son representaciones gráficas para mostrar la relación entre los elementos de los conjuntos. Por lo general cada conjunto se representa por medio de un círculo, óvalo o rectángulo, y la forma en que se entrelazan las figuras que representan a los conjuntos muestra la relación que existe entre los elementos de los respectivos conjuntos.

El siguiente esquema es un ejemplo de diagrama de Venn.



Algunas afirmaciones de este diagrama de Venn son:

$A \subseteq U$	$C \subseteq U$	$U \not\subset A$
$B \subseteq C$	$B \subseteq U$	$U \not\subset C$
$A \not\subset C$	$B \not\subset A$	$U \not\subset B$
$C \not\subset B$	$C \not\subset A$	

2.2 Operaciones con conjuntos

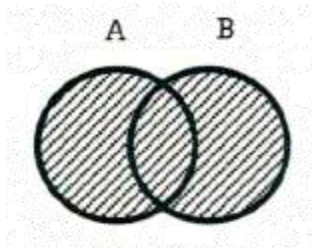
Así cómo es posible llevar a cabo operaciones entre números, también se pueden realizar operaciones con conjuntos y éstas se aplican en prácticamente todos los temas de las ciencias de la computación.

Por otro lado, las operaciones con conjuntos se pueden ilustrar por medio de un diagrama de Venn con el fin de observar más claramente la relación entre los conjuntos.

Unión ($A \cup B$)

La unión del conjunto A y el conjunto B es el conjunto que contiene a todos los elementos del conjunto A y del conjunto B:

$$\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ó } x \in B\}}$$



$A \cup B$

Ejemplo. Sean los conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$

$B = \{x \mid x \in Z^+; x \leq 12; x \text{ es par}\}$

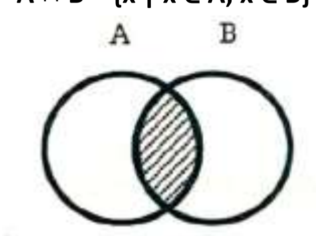
Aplicando la definición de unión de conjuntos se tiene que:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12\}$

Intersección ($A \cap B$)

La intersección del conjunto A y el conjunto B es el conjunto que contiene a todos los elementos que son comunes a los conjuntos A y B:

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A; x \in B\}}$$



$A \cap B$

Ejemplo. Sean los conjuntos:

A= {1, 2, 3, 6, 7, 8)

B = {x | x ∈ Z^+; x ≤ 12; x es par}

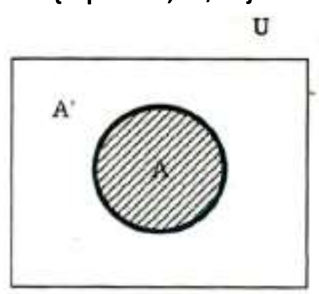
Aplicando la definición de intersección de conjuntos se tiene que:

A ∩ B = {2, 6, 8)

Complemento (A')

El complemento de un conjunto A, que se denota como A', es el conjunto que contiene a todos los elementos del conjunto universo que no pertenecen al conjunto A:

A'= {x | x ∈ U; x ∉ A}



Ejemplo. Sean los conjuntos

U = {x |x ∈ Z} A = {1, 3, 5, 8)

Entonces aplicando la definición de A' se tiene que:

A' = {x | x ∈ Z; x ∉ {1, 3, 5, 8}}

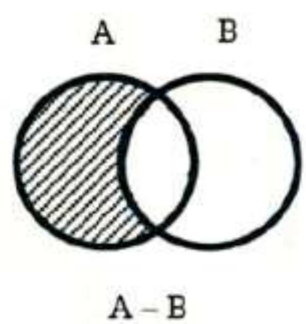
= {x | x ∈ Z; x ≠ 1; x ≠ 3; x ≠ 5; x ≠ 8}

Diferencia (A-B)

La diferencia entre dos conjuntos arbitrarios A y B es el conjunto que contiene a todos los elementos del conjunto A que no se encuentran en B:

A - B = {x | x ∈ A; x ∉ B}

El conjunto diferencia también se conoce como complemento de B con respecto a A. La siguiente figura muestra el diagrama de Venn de la definición:



Ejemplo. Sean los conjuntos:

A = {1, 2, 3, 4, 7, 9, 10}

B = {3, 4, 5, 6, 7, 8}

Entonces se tiene que:

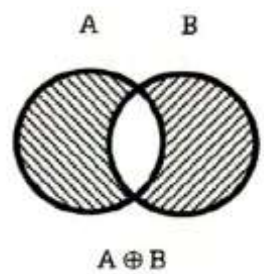
A - B = {1, 2, 9, 10}

B - A = {5, 6, 8}

Diferencia simétrica (A ⊕ B)

La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B, que se denota como A ⊕ B, es el conjunto que contiene a todos los elementos que se encuentran en el conjunto A pero no están en el conjunto B y también a los elementos del conjunto B que no están en A. Dicho de otra manera, el conjunto A ⊕ B contiene a todos los elementos que se encuentran en A ∪ B pero que no están en A ∩ B:

A ⊕ B = {x | (x ∈ A y x ∉ B) o (x ∈ B y x ∉ A)}



Ejemplo. Sean los conjuntos:

A = {1, 2, 3, 4, 7, 9, 10}

B = {3, 4, 5, 6, 7, 8}

Entonces. Aplicando las definiciones correspondientes se obtiene que:

B - A = {5, 6, 8}

A - B = {1, 2, 9, 10}

A ⊕ B = {1, 2, 5, 6, 8, 9, 10}

2.3 Propiedades de los conjuntos

Tarea Integrador Investigar este Tema.

2.4 Aplicaciones de conjuntos

Bases de datos:

Una base de datos o banco de datos es un conjunto de datos pertenecientes a un mismo contexto; representa una colección de conjuntos de objetos únicos que pueden ordenarse y relacionarse.

Diagramas de venn:

Es la representación gráfica de un conjunto en la cual se sitúan dentro de una línea cerrada los signos representativos de los elementos del conjunto. En la figura se muestran las dos formas respectivas de representar el conjunto: A= {a, b, c, d, e}.

Informática y telecomunicaciones

Un protocolo es una descripción formal de un conjunto de reglas y convenciones que rigen la manera en que se comunican los dispositivos de una red; las conexiones a Internet pueden utilizar varios protocolos. El conjunto Protocolo de control de transporte/protocolo Internet (TCP/IP) es el principal conjunto de protocolos que se utiliza en Internet. Los protocolos del conjunto TCP/IP trabajan juntos para transmitir o recibir datos e información.

Varios grupos de trabajo al interno de la FAO están comprometidos en la creación y en el uso de diversos conjuntos de datos geoespaciales temáticos relacionados con sus mandatos específicos. Al interno de la gran diversidad de productos FAO, algunos de los conjuntos de datos espaciales de definición gruesa a nivel global, continental y sub-continental han sido identificados como Conjuntos de datos centrales que la FAO coloca a la disposición de la comunidad geoespacial.

Soporte de lenguajes

Uno de los primeros lenguajes que soportaban conjuntos fue Pascal; muchos lenguajes lo incluyen ahora, ya sea en el núcleo del lenguaje o en una librería estándar. El Lenguaje de programación Java ofrece la interfaz Set para el soporte de conjuntos (donde lo implementa la clase Hash Set usando una tabla hash), y la sub-interfaz SortedSet para dar soporte a conjuntos ordenados (implementado por la clase TreeSet por medio de un árbol de búsqueda binario). En C++, STL ofrece la clase "conjunto" para templates, que implementa a un conjunto ordenado usando un árbol de búsqueda binario; el STL de SGI ofrece la clase "hash_set", implementando conjuntos con una tabla de hash. Python tiene un tipo de conjunto incorporado, pero no un conjunto en sí.

Implementaciones

Los conjuntos pueden implementarse usando diversas estructuras de datos. Con una estructura de datos ideal se comprueba si un objeto se encuentra en el conjunto, además de activarse otras operaciones útiles tales como la iteración sobre todos los objetos del conjunto, la realización de uniones o intersecciones entre dos conjuntos, o la toma del complemento de un conjunto en algún dominio limitado. Cualquier estructura de datos en cadena asociativa puede usarse para implementar un conjunto, dejando que los juegos de claves sean los elementos del conjunto, e ignorando los valores. Gracias a su parecido con las series asociativas, los conjuntos se implementan habitualmente por los mismos medios, es decir, un árbol binario de búsqueda auto-balanceable para conjuntos ordenados (con O (log n) para la mayoría de operaciones), o una tabla hash para conjuntos no ordenados.

En Medicina:

Particularmente en el caso de la Medicina es ampliamente aplicable en los diagnósticos de enfermedades, ya que tenemos que "conjuntar" todos los signos y síntomas del paciente para poder dar un diagnóstico preciso. Aunque se usan Diagramas de Venn Euler para la diagnosis de nuestros casos, es importante mencionar que todos los médicos inconscientemente usan "Diagramas mentales" (por llamarlo de algún modo) para integrar todos los datos que el paciente nos revela.

Áreas de aplicación

- Oncología
- Inmunología: como en el método de Kaerber y el método de Reed y Muench
- Virología
- Fisiología humana: Como en el análisis del control metabólico y la gasometría arterial
- Fisiología humana: Como en el análisis del control metabólico y la gasometría arterial
- Instrumental diagnóstico: Como la electroencefalografía y la ecocardiografía
- Informática médica: como en Cytoscape y STING
- Epidemiología: como en el modelaje matemático de epidemias y la bioestadística
- Genética: como en la predicción de genes, la frecuencia genotípica y la frecuencia génica

ANEXO I – Leyes de Conjuntos

1.- Doble negación

a) $A'' = A$

2.- Ley conmutativa

a) $A \cup B = B \cup A$
b) $A \cap B = B \cap A$

3.- Ley asociativa

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

4.- Ley distributiva

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5.- Ley de idempotencia

a) $A \cup A = A$
b) $A \cap A = A$
c) $\mathbf{U} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
d) $\mathbf{U} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U}$
e) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
f) $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$

6.- Ley de Morgan

a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$
b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

7.- Equivalencia

a) $A \cup A' \cap B = A \cup B$

8.- Contradicción

a) $A \cap A' = \varnothing$

9.- Propiedades del complemento

a) $A \cup A' = \mathbf{U}$
b) $\mathbf{U}' = \varnothing$
c) $\varnothing' = \mathbf{U}$

10.- Ley de identidad

a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
b) $A \cap \mathbf{U} = A$
c) $A \cup \varnothing = A$
d) $A \cap \varnothing = \varnothing$
e) $A \cup A \cap B = A \cap (\mathbf{U} \cup B) = A$

Anexo II - Relación entre teoría de conjuntos, lógica matemática y álgebra booleana

Propiedad	Teoría de conjuntos	Lógica matemática	Álgebra booleana
Equivalencia	$A = B$	$p \Leftrightarrow q;\ p \equiv q$	$A = B$
Unión	$A \cup B$	$p \vee q$	$A + B$
Intersección	$A \cap B$	$p \wedge q$	AB
Complementación	A'	p'	A'
Doble negación	$A'' = A$	$p'' \equiv p$	$A'' = A$
Diferencia	$A - B$	$p \wedge q'$	AB'
Leyes de Morgan	$(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$ $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$	$(p \vee q \vee r)' \equiv p' \wedge q' \wedge r'$ $(p \wedge q \wedge r)' \equiv p \vee q \vee r'$	$(A + B + C)' = A'B'C'$ $(ABC)' = A' + B' + C'$
Ley conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	$A + B = B + A$ $AB = BA$
Ley asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	$A + (B + C) = (A + B) + C$ $A(BC) = (AB)C$
Ley distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A(B + C) = AB + AC$ $A + (BC) = (A + B)(A + C)$
Ley de idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$ $\mathbf{U} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $\mathbf{U} \cap \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$ $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$ $1 \vee 1 \equiv 1$ $1 \wedge 1 \equiv 1$ $0 \vee 0 \equiv 0$ $0 \wedge 0 \equiv 0$	$A + A = A$ $AA = A$ $1 + 1 = 1$ $1(1) = 1$ $0 + 0 = 0$ $0(0) = 0$
Equivalencia	$A \cup A' \cap B = A \cup B$	$p \vee p' \wedge q \equiv p \vee q$	$A + A'B = A + B$
Contradicción	$A \cap A' = \varnothing$	$p \wedge p' \equiv 0$	$AA' = 0$
Propiedades del complemento	$A \cup A' = \mathbf{U}$ $\mathbf{U}' = \varnothing$ $\varnothing' = U$	$p \vee p' \equiv 1$ $1' \equiv 0$ $0' \equiv 1$	$A + A' = 1$ $1' = 0$ $0' = 1$
Ley de identidad	$A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ $A \cap \mathbf{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup A \cap B = A \cap (\mathbf{U} \cup B) = A$	$p \vee 1 \equiv 1$ $p \wedge 1 \equiv p$ $p \vee 0 \equiv p$ $p \wedge 0 \equiv 0$ $p \vee p \wedge q \equiv p \wedge (1 \vee q) \equiv p$	$A + 1 = 1$ $A(1) = A$ $A + 0 = A$ $A(0) = 0$ $A + AB = A(1 + B) = A$